

Analysis III

Vorlesung 72



KOROLLAR 72.1. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und

$$v: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine messbare Abbildung. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_v: M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n, (x, y) \longmapsto (x, y + v(x)),$$

bijektiv und maßtreu.

Beweis. Die Abbildung φ_v ist messbar nach Lemma 64.11 und nach Lemma 68.3. Sie ist ferner bijektiv, die Umkehrabbildung ist φ_{-v} . Sei $T \subseteq M \times N$ messbar. Wir müssen

$$(\mu \otimes \lambda^n)(T) = (\mu \otimes \lambda^n)(\varphi_v^{-1}(T))$$

zeigen. Für $x \in M$ ist

$$(\varphi_v^{-1}(T))(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in \varphi_v^{-1}(T)\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y + v(x)) \in T\}.$$

Aufgrund der Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes besitzt diese Menge das gleiche Maß wie

$$\{y + v(x) \in \mathbb{R}^n \mid (x, y + v(x)) \in T\} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid (x, z) \in T\} = T(x).$$

Aufgrund der Integrationsversion des Cavalieri-Prinzips gilt also

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \lambda^n)(T) &= \int_M \lambda^n(T(x)) \, d\mu(x) \\ &= \int_M \lambda^n((\varphi_v^{-1}(T))(x)) \, d\mu(x) \\ &= (\mu \otimes \lambda^n)(\varphi_v^{-1}(T)). \end{aligned}$$

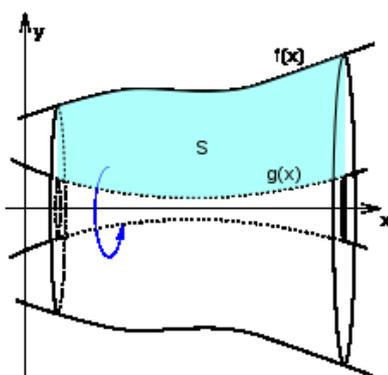
□

Einige Volumina

DEFINITION 72.2. Zu einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ nennt man

$$\{(x, y \cos \alpha, y \sin \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

die zugehörige *Rotationsmenge* (um die x -Achse).



SATZ 72.3. *Es sei*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \longmapsto f(t),$$

eine nichtnegative messbare Funktion und sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ der Rotationskörper zum Subgraphen von f um die x -Achse. Dann besitzt K das Volumen

$$\lambda^3(K) = \pi \cdot \int_{[a,b]} (f(t))^2 d\lambda(t) = \pi \cdot \int_a^b (f(t))^2 dt,$$

wobei für die zweite Formel f als stetig vorausgesetzt sei.

Beweis. Nach dem Cavalieri-Prinzip und nach der Formel für den Flächeninhalt des Kreises ist

$$(\lambda \otimes \lambda^2)(K) = \int_{[a,b]} \lambda^2(K(t)) d\lambda(t) = \pi \int_{[a,b]} (f(t))^2 d\lambda(t).$$

Für stetiges f ist dies nach Satz 70.5 gleich

$$\pi \int_a^b (f(t))^2 dt.$$

□

Den Oberflächeninhalt eines Rotationskörpers zu einer (differenzierbaren) Funktion werden wir in Satz 85.5 berechnen.

BEISPIEL 72.4. Wir wollen das Volumen einer n -dimensionalen abgeschlossenen Kugel vom Radius r berechnen, also von

$$B_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} .$$

Wegen Satz 67.2 gilt dabei $\lambda^n(B_n(r)) = r^n \lambda^n(B_n(1))$, d.h. es geht im Wesentlichen darum, das Volumen der Einheitskugel auszurechnen.

Ihr Volumen bezeichnen wir mit $\beta_n = \lambda^n(B_n)$, zur Berechnung gehen wir induktiv vor (es ist $\beta_1 = 2$). Wir betrachten

$$B_n \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} .$$

Für jedes fixierte h , $-1 \leq h \leq 1$, kann man den Querschnitt als

$$\begin{aligned} B_n(h) &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, h) \in B_n\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + h^2 \leq 1\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - h^2\} \\ &= B_{n-1} \left(0, \sqrt{1 - h^2}\right) \end{aligned}$$

schreiben, d.h. als eine $(n-1)$ -dimensionale Kugel vom Radius $\sqrt{1-h^2}$. Aufgrund des Cavalieri-Prinzips ist daher

$$\begin{aligned} \beta_n &= \lambda^n(B_n(1)) \\ &= (\lambda^{n-1} \otimes \lambda^1)(B_n(1)) \\ &= \int_{[-1,1]} \lambda^{n-1} \left(B_{n-1}(\sqrt{1-h^2}) \right) d\lambda^1 \\ &= \int_{[-1,1]} \left(\sqrt{1-h^2} \right)^{n-1} \lambda^{n-1}(B_{n-1}(1)) d\lambda^1 \\ &= \lambda^{n-1}(B_{n-1}(1)) \cdot \int_{[-1,1]} \left(\sqrt{1-h^2} \right)^{n-1} d\lambda^1 \\ &= \beta_{n-1} \cdot \int_{[-1,1]} \left(\sqrt{1-h^2} \right)^{n-1} d\lambda^1 . \end{aligned}$$

Dabei können wir das Integral rechts wegen Satz 70.5 und Korollar 24.7 über Stammfunktionen ausrechnen. Die Substitution $h = \sin t$ liefert

$$\int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-h^2} \right)^{n-1} dh = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt .$$

Im Beweis zu Korollar 25.4 wurden diese Integrale berechnet; mit $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ gilt

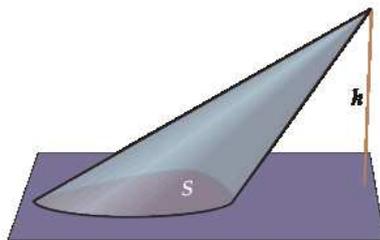
$$a_n = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\dots 3 \cdot 1}{n(n-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{bei } n \text{ gerade } \geq 2, \\ \frac{(n-1)(n-3)\dots 4 \cdot 2}{n(n-2)\dots 5 \cdot 3} & \text{bei } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Mit diesen Formeln und der Rekursionsvorschrift $\beta_n = 2\beta_{n-1}a_n$ kann man schließlich mit Hilfe der Fakultätsfunktion das Kugelvolumen als

$$\beta_n = \frac{\pi^{n/2}}{\text{Fak}(n/2)}$$

schreiben. Diese Formel ergibt sich durch Induktion aus Satz 32.3.

Speziell ergibt sich für die Fläche des Einheitskreises der Wert π , für das Volumen der Einheitskugel der Wert $\frac{4}{3}\pi$ und für das vierdimensionale Volumen der vierdimensionalen Standardkugel der Wert $\frac{\pi^2}{2}$.



DEFINITION 72.5. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0$ und $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt. Dann nennt man die Menge

$$K_B = \{P + t(Q - P) \mid Q \in B, t \in [0, 1]\}$$

den Kegel zur Basis B mit der Spitze P .

SATZ 72.6. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt und K_B der zugehörige Kegel. Es sei $h = P_{n+1}$ die letzte Koordinate von P . Dann ist K_B ebenfalls messbar, und es gilt

$$\lambda^{n+1}(K_B) = \frac{1}{n+1} \lambda^n(B) \cdot |h|.$$

Beweis. Bei $h = 0$ liegt der gesamte Kegel in \mathbb{R}^n und sein λ^{n+1} -Maß ist 0 nach Lemma 66.11, sei also $h \neq 0$. Der Durchschnitt von $K = K_B$ mit der durch $x_{n+1} = t$, t zwischen 0 und h , gegebenen Hyperebene ist

$$\begin{aligned} K(t) &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n, t) \in K_B\} \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n, t) = P + \frac{(h-t)}{h}(Q - P), Q \in B \right\}. \end{aligned}$$

Wegen der Translationsinvarianz und Korollar 67.3 ist dessen Volumen gleich $\left|\frac{h-t}{h}\right|^n \lambda^n(B)$. Nach dem Cavalieri-Prinzip ist also (mit $s = h - t$)

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1}(K_B) &= \int_0^{|h|} \lambda^n(K(s)) ds \\ &= \int_0^{|h|} \lambda^n(B) \cdot \left(\frac{s}{|h|}\right)^n ds \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \int_0^{|h|} s^n ds \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \frac{1}{n+1} |h|^{n+1} \end{aligned}$$

$$= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |h|.$$

□

BEISPIEL 72.7. Wir stellen eine falsche Berechnung der Kugeloberfläche an, die auf einem falsch interpretierten Cavalieri-Prinzip beruht. Wir betrachten die obere Einheitshalbkugel. Zu jeder Höhe $h \in [0, 1]$ ist der Querschnitt der Kugeloberfläche mit der durch $z = h$ definierten Ebene eine Kreislinie mit dem Radius $\sqrt{1-h^2}$. Der Kreisumfang eines solchen Kreises ist $2\pi\sqrt{1-h^2}$. Wir wollen die Oberfläche der oberen Halbkugel berechnen, indem wir diese Umfänge über die Höhe aufintegrieren. Für die Kugeloberfläche würde sich dann (mit der Substitution $h = \sin s$)

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 2\pi\sqrt{1-h^2} dh \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-h^2} dh \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s ds \\ &= 4\pi \frac{1}{2} (s + \sin s \cos s) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \frac{\pi}{2} \\ &= \pi^2. \end{aligned}$$

Der wahre Wert ist aber mit 4π deutlich größer.

Der Satz von Fubini

Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) zwei σ -endliche Maßräume und sei

$$f: M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Der Satz von Fubini bringt das Integral $\int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu)$ mit dem Integral über M der Funktion

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto \int_N f(x, y) d\nu(y),$$

in Verbindung. Er erlaubt es, Integrale über einem höherdimensionalen Bereich auf eindimensionale Integrale zurückzuführen. Sein Beweis beruht auf dem Cavalieri-Prinzip, angewendet auf den Produktraum $M \times N \times \overline{\mathbb{R}}$, und ist prinzipiell nicht schwierig. Allerdings muss man bei einigen Details (Nichtnegativität, undefiniertheitsstellen, Nullmengen) doch präzise sein, so dass wir einige vorbereitende Lemmata anführen.

Eine Teilmenge $Z \subseteq M$ eines Maßraumes heißt *Nullmenge*, wenn $\mu(Z) = 0$ ist. Beispielsweise ist jede abzählbare Menge in \mathbb{R}^n eine Nullmenge. Manchmal verwendet man diesen Begriff auch für nicht notwendigerweise messbare

Teilmengen Z , für die es eine messbare Menge $Z \subseteq Z'$ gibt mit $\mu(Z') = 0$. Für eine Eigenschaft E , die für die Punkte eines Maßraumes erklärt ist, sagt man, dass die Eigenschaft *fast überall* gilt, wenn die Ausnahmemenge

$$\{x \in M \mid E(x) \text{ gilt nicht}\}$$

eine Nullmenge ist. Insbesondere spricht man von *fast überall definierten Funktionen*. Da es bei Integralen nicht auf Nullmengen des Definitionsbereiches ankommt, kann man häufig solche „kleinen“ undefiniertheitsstellen ignorieren.

LEMMA 72.8. *Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) zwei σ -endliche Maßräume und sei*

$$f: M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) *Für jedes $x \in M$ sind die Funktionen*

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, y \longmapsto f(x, y),$$

und für jedes $y \in N$ sind die Funktionen

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, x \longmapsto f(x, y),$$

messbar.

- (2) *Die Funktion*

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, y \longmapsto \int_M f(x, y) d\mu(x),$$

und die Funktion

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, x \longmapsto \int_N f(x, y) d\nu(y),$$

sind messbar.

- (3) *Es gilt*

$$\begin{aligned} \int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_M \left(\int_N f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_N \left(\int_M f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

Beweis. (1) folgt direkt aus der Messbarkeit der Inklusionen

$$M \longrightarrow M \times N, x \longmapsto (x, y),$$

für jedes $y \in N$. (2) folgt aus Lemma 71.4 angewendet auf

$$S(f) = M \times (N \times \overline{\mathbb{R}}),$$

da $(S(f))(x)$ der Subgraph von $f(x, -)$ und $\int_N f(x, -) d\nu = \nu \otimes \lambda^1(S(f)(x))$ ist. (3). Nach Satz 71.5, angewendet auf das Produkt $M \times (N \times \overline{\mathbb{R}})$, ist

$$\int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) = (\mu \otimes \nu \otimes \lambda^1)(S(f))$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M (\nu \otimes \lambda^1)((S(f))(x)) d\mu \\
&= \int_M \left(\int_N f(x, y) d\nu \right) d\mu.
\end{aligned}$$

Da man die Rollen von M und N vertauschen kann, ergibt sich auch die andere Darstellung. \square

LEMMA 72.9. *Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) zwei σ -endliche Maßräume und sei*

$$f: M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\int_M \left(\int_N |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \text{ oder } \int_N \left(\int_M |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

endlich ist.

Beweis. Die Integrierbarkeit von f ist nach Lemma 69.5 äquivalent zur Integrierbarkeit der Betragsfunktion, was die Endlichkeit von $\int_{M \times N} |f| d(\mu \otimes \nu)$ bedeutet. Die Aussage folgt daher aus Lemma 72.8. \square

Wir kommen nun zum *Satz von Fubini*.

SATZ 72.10. *Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) zwei σ -endliche Maßräume und sei*

$$f: M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine integrierbare Funktion. Dann sind die beiden Funktionen

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto \int_N f(x, y) d\nu(y),$$

und

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, y \longmapsto \int_M f(x, y) d\mu(x),$$

fast überall reellwertig und fast überall integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_M \left(\int_N f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_N \left(\int_M f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)
\end{aligned}$$

Beweis. Nach Voraussetzung und nach Lemma 72.9 ist die Funktion $x \mapsto \int_N |f(x, y)| d\nu(y)$ integrierbar. Dies bedeutet insbesondere, dass das Integral $\int_N |f(x, y)| d\nu(y)$ fast überall einen endlichen Wert hat, dass es also eine Nullmenge $Z \subseteq M$ gibt mit $\int_N |f(x, y)| d\nu(y) < \infty$ für $x \notin Z$. Daher sind nach Lemma 69.5 für $x \notin Z$ die Integrale $\int_N f(x, y) d\nu(y)$ definiert und endlich, und dies gilt ebenso für die positiven und negativen Teile $f_+(x, y)$ und $f_-(x, y)$.

Da sich Integrale nicht ändern, wenn man im Integrationsgebiet eine Nullmenge weglässt, und da $Z \times N$ eine Nullmenge in der Produktmenge ist, kann man M durch $M \setminus Z$ ersetzen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \int_{M \times N} f \, d(\mu \otimes \nu) &= \int_{M \times N} (f_+ - f_-) \, d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_{M \times N} f_+ \, d(\mu \otimes \nu) - \int_{M \times N} f_- \, d(\mu \otimes \nu) \end{aligned}$$

und wenden auf die beiden Summanden Lemma 72.8 an, so dass dies gleich

$$\begin{aligned} &= \int_M \left(\int_N f_+(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) - \int_M \left(\int_N f_-(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_M \left(\int_N (f_+(x, y) - f_-(x, y)) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_M \left(\int_N f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

ist. □

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Cavalieriho princip.svg , Autor = Benutzer Pajs auf cs Wikipedia, Lizenz = Public domain	1
Quelle = Integral apl rot objem3.svg , Autor = Benutzer Pajs auf cs Wikipedia, Lizenz = PD	2
Quelle = Coneirr3.svg , Autor = Benutzer Mpfiz auf Commons, Lizenz = PD	4