Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 88

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 88.1. Es sei M eine berandete Mannigfaltigkeit und ∂M sei der Rand. Zeige, dass der topologische Rand von $M \setminus \partial M$ gleich ∂M ist.

Aufgabe 88.2. Bestimme die Träger der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(1) Eine Polynomfunktion.
(2) Die Sinusfunktion.
(3) Die Exponentialfunktion.
(4) Die Indikatorfunktion $e_{\mathbb{Z}}$.
(5) Die Indikatorfunktion $e_{\mathbb{Q}}$.
(6) Die Indikatorfunktion $e_{[a,b]}$.
(7) Die Indikatorfunktion $e_{]a,b[}$.

Aufgabe 88.3. Es sei

$$f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine offene Teilmenge $U \subseteq X$, die den Träger von f umfasse. Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn die Einschränkung $f|_U$ stetig ist.

Aufgabe 88.4. Es sei X ein topologischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Abschluss von T gleich dem Träger der Indikatorfunktion e_T ist.

Aufgabe 88.5. Man gebe eine kompakte Ausschöpfung für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ an.

Aufgabe 88.6. Man gebe eine kompakte Ausschöpfung für den $\mathbb{R}^n$ an.

Aufgabe 88.7. Es sei X ein topologischer Raum. Bestimme zur Überdeckung von X durch X eine untergeordnete Partition der Eins.

Aufgabe 88.8. Es sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Wir betrachten die Familie der Indikatorfunktionen

$$e_P, P \in X.$$

Welche Eigenschaften einer (dieser Überdeckung) untergeordneten Partition der Eins erfüllt diese Familie?

Aufgabe 88.9. Wir betrachten die kompakte Ausschöpfung $A_n = [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, der reellen Zahlen und die offene Überdeckung $W_n = A_{n+1}^o \setminus A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, (es sei $A_{-1} = \emptyset$). Finde eine Überdeckung von $\mathbb{R}$ mit offenen Intervallen, die die Eigenschaften aus Lemma 88.8 (und seinem Beweis) erfüllt.

Aufgabe 88.10. Man konstruiere eine Folge von stetigen Funktionen

$$f_n \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

zu $n \in \mathbb{N}$ derart, dass 0 zum Träger einer jeden Funktion f_n gehört.

Aufgabe 88.11. Es sei $V \subseteq H$ eine offene Menge im Halbraum $H \subset \mathbb{R}^n$ und sei

$$f \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass es eine offene Menge $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion

$$\tilde{f} \colon \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $\tilde{V} \cap H = V$ und $\tilde{f}|_{\tilde{V}} = f$ gibt.

Aufgabe 88.12. Es sei

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, dass die Ableitung f' ebenfalls kompakten Träger hat, und dass $\int_{\mathbb{R}} f' d\lambda^1 = 0$ ist.

Aufgabe 88.13. Es sei

$$f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, dass die Ableitung f' ebenfalls kompakten Träger hat, und dass $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f' d\lambda^1 = f(0)$ ist. Zeige, dass diese Aussage nicht gelten muss, wenn f nicht kompakten Träger besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 88.14. (3 Punkte)

Es sei A_n, $n \in \mathbb{N}$, eine kompakte Ausschöpfung eines topologischen Raumes X. Zeige, dass die Beziehung

$$A_{n+1} \setminus A_n^o \subseteq A_{n+2}^o \setminus A_{n-1}$$

gilt.

Aufgabe 88.15. (4 Punkte)

Man gebe zur offenen Überdeckung

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+3[$$

eine untergeordnete stetige Partition der Eins an.

Aufgabe 88.16. (6 Punkte)

Wir betrachten die kompakte Ausschöpfung

$$A_n = B\left(0, n\right), n \in \mathbb{N},$$

des $\mathbb{R}^2$ und die offene Überdeckung

$$W_n = A_{n+1}^o \setminus A_{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

(es sei $A_{-1} = \emptyset$). Finde eine Überdeckung des $\mathbb{R}^2$ mit offenen Kreisscheiben, die die Eigenschaften aus Lemma 88.8 (und seinem Beweis) erfüllt.

Aufgabe 88.17. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen topologischen Raum, der keine kompakte Ausschöpfung besitzt.