Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 84

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 84.1. Wir betrachten eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ als riemannsche Mannigfaltigkeit. Was ist die kanonische Volumenform auf V?

Aufgabe 84.2. Es sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathcal{V}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^1(M),\, F \longmapsto \omega_F,$$

mit

$$(\omega_F(P))\,(v) \,:=\, \langle F(P), v \rangle_P\,,$$

linear ist.

Aufgabe 84.3. Wir betrachten eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ als riemannsche Mannigfaltigkeit. Was besagt die in Lemma 84.3 beschriebene Korrespondenz zwischen Vektorfeldern und 1-Differentialformen in dieser Situation?

Aufgabe 84.4. Begründe Bemerkung 84.4.

Aufgabe 84.5. Es sei M eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die kanonische Volumenform ω dadurch festgelegt ist, dass sie in jedem Punkt für eine die Orientierung repräsentierende Orthonormalbasis den Wert 1 besitzt.

Aufgabe 84.6. Es sei V ein n-dimensionaler reeller orientierter Vektorraum und λ ein translationsinvariantes Maß auf V. Zeige, dass die Zuordnung

$$V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R},\, (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \pm\lambda(P(v_1, \ldots, v_n)),$$

wobei das Vorzeichen positiv zu wählen ist, wenn die Vektoren die Orientierung repräsentieren, eine alternierende multilineare Abbildung ist.

Aufgabe 84.7. Zeige, dass bei einer riemannschen Mannigfaltigkeit die Kartenabbildungen

$$\alpha\colon U \longrightarrow V$$

im Allgemeinen keine Isometrie

$$T_P(\alpha)\colon T_PU \longrightarrow T_{\alpha(P)}V$$

induzieren (wenn T_PU mit $\langle -, - \rangle_P$ und $T_{\alpha(P)}V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen ist).

Aufgabe 84.8.*

Wir betrachten den Graph M der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (u, v) \longmapsto u^2 + uv - v^3,$$

als zweidimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, also

$$M = \left\{ (u, v, u^2 + uv - v^3) | \, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten riemannschen Metrik. Es sei

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow M,\ (u, v) \longmapsto (u, v, u^2 + uv - v^3),$$

die zugehörige Diffeomorphie.

a) Bestimme das totale Differential zu ψ sowie die Bildvektoren $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$.

b) Bestimme für jeden Punkt der Form $P = (u, 0)$ den Flächeninhalt des von $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$ aufgespannten Parallelogramms.

c) Bestimme für jeden Punkt der Form $P = (0, v)$ den Flächeninhalt des von $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 84.9. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

(mit $m = n - 1 \geq 0$) eine stetig differenzierbare Funktion, die in jedem Punkt der Faser M über $0 \in \mathbb{R}$ regulär sei. Wir fassen M als eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit auf. Zeige, dass zwischen der Volumenform τ aus Korollar 83.6 und der kanonischen Volumenform ω die Beziehung

$$\tau(P, v_1, \ldots, v_m) \, = \, \pm \, || \, \text{Grad } \varphi(P) \, || \, \omega(P, v_1, \ldots, v_m)$$

besteht.

Aufgabe 84.10. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

(mit $m = n - \ell \geq 0$) eine stetig differenzierbare Abbildung, die in jedem Punkt der Faser M über $0 \in \mathbb{R}^\ell$ regulär sei. Wir fassen M als eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit auf. Es sei vorausgesetzt, dass die Gradienten

$$\operatorname{Grad} \varphi_1(P), \ldots, \operatorname{Grad} \varphi_\ell(P)$$

für jeden Punkt von $P \in M$ senkrecht aufeinander stehen. Zeige, dass zwischen der Volumenform τ aus Korollar 83.6 und der kanonischen Volumenform ω die Beziehung

$$\tau(P, v_1, \ldots, v_m) = \pm \,|| \operatorname{Grad} \varphi_1(P) || \cdots || \operatorname{Grad} \varphi_\ell(P) ||\, \omega(P, v_1, \ldots, v_m)$$

besteht.

Aufgaben zum Abgeben

Bei einer riemannschen Mannigfaltigkeit M definiert man zu einem Tangentialvektor $v \in T_PM$ die Norm durch $|| v ||= \sqrt{\langle v, v\rangle_P}$.

Aufgabe 84.11. (4 Punkte)

Es sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die Zuordnung

$$TM \longrightarrow \mathbb{R},\, v \longmapsto || v ||,$$

stetig ist.

Aufgabe 84.12. (3 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ mit der durch die Hesse-Form zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x^2 + y^4,$$

gegebenen Bilinearform eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 84.13. (4 Punkte)

Man gebe für jeden Punkt $P = (x, y, z)$ der Einheitssphäre K eine Orthonormalbasis in $T_PK \subset \mathbb{R}^3$ an (bezüglich der induzierten riemannschen Struktur).

Aufgabe 84.14. (6 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei das Ellipsoid

$$E = \left\{(x, y, z) |\, x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 5\right\}$$

und die Ebene

$$M = \{(x, y, z) |\, 7x - 3y - 2z = 2\}$$

gegeben. Berechne den Flächeninhalt des Durchschnitts $M \cap E$.

Aufgabe 84.15. (6 Punkte)

Man erstelle eine Computergraphik, die die in Bemerkung 84.4 beschriebene Situation anhand einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ veranschaulicht.