Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 83

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 83.1.*

Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer stetigen positiven Volumenform ω. Zeige, dass

$$\int_M \omega < \infty$$

ist.

Aufgabe 83.2. Zeige, dass das zu einer stetigen positiven Volumenform auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in Definition 83.3 eingeführte Volumenmaß ein σ-endliches Maß ist.

Aufgabe 83.3. Es sei

$$\omega \,=\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \,=\, e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$$

die Standard-Volumenform auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass für jede messbare Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\int_T \omega \,=\, \int_T d\lambda^n \,=\, \lambda^n(T)$$

gilt.

Aufgabe 83.4. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer positiven Volumenform ω. Es sei $T \subseteq M$ messbar und $N \subseteq M$ eine Nullmenge. Zeige, dass

$$\int_T \omega \,=\, \int_{T \setminus N} \omega$$

gilt.

Aufgabe 83.5. Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Topologie und es seien ω_1 und ω_2 positive Volumenformen auf M. Zeige, dass für jede messbare Teilmenge $T \subseteq M$ und $a, b \in \mathbb{R}_+$ die Beziehung

$$\int_T (a\omega_1 + b\omega_2) = a \int_T \omega_1 + b \int_T \omega_2$$

gilt.

Aufgabe 83.6. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie. Zeige, wie man unter Bezug auf Karten „Nullmengen“ von M erklären kann, ohne dass ein Maß gegeben ist. Zeige ferner, dass wenn eine positive Volumenform gegeben ist, diese Nullmengen auch Nullmengen im Sinne der Maßtheorie sind.

Aufgabe 83.7. Beschreibe den Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ als Faser einer Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass die gemäß Korollar 83.6 gegebene Volumenform ω positiv ist. Berechne $\int_{S^1} \omega$.

Aufgabe 83.8. Beschreibe die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ als Faser einer Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass die gemäß Korollar 83.6 gegebene Volumenform ω positiv ist. Berechne $\int_{S^2} \omega$.

Aufgabe 83.9. Es seien L und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi \colon L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ eine messbare Differentialform mit der zurückgezogenen Differentialform $\varphi^*\omega \in \mathcal{E}^1(L)$ und es sei

$$\gamma \colon I \longrightarrow L$$

eine stetig differenzierbare Kurve (I ein reelles Intervall). Zeige, dass für die Wegintegrale die Gleichheit

$$\int_\gamma \varphi^*\omega = \int_{\varphi \circ \gamma} \omega.$$

Aufgabe 83.10. Sei

$$\gamma\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (\cos t\,, \sin t\,),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zu den folgenden Differentialformen

a) $xdx + ydy$,

b) $xdx - ydy$,

c) $ydx + xdy$,

d) $ydx - xdy$.

Aufgabe 83.11.*

Berechne das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ zu

$$\gamma\colon [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (-t^2, t^3 - 1, t + 2),$$

für die 1-Differentialform

$$\omega = x^3dx - yzdy + xz^2dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 83.12.*

Wir betrachten die differenzierbaren Abbildungen

$$\gamma\colon [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, t^{-1}),$$

und

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u,v) \longmapsto (u^2, uv, -u + v^2),$$

und die Differentialform

$$\omega = xdx - zdy + dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

a) Berechne die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ auf dem $\mathbb{R}^2$.

b) Berechne das Wegintegral zur Differentialform $\varphi^*\omega$ zum Weg γ.

c) Berechne (ohne Bezug auf b)) das Wegintegral zur Differentialform ω zum Weg $\varphi \circ \gamma$.

Aufgabe 83.13.*

Wir betrachten die differenzierbaren Abbildungen

$$\gamma\colon [1,c] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, t^3),$$

(mit $c \geq 1$) und

$$\varphi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u,v) \longmapsto (u^3, u^2 + v^2, u^{-1}v^{-1}),$$

und die Differentialform
$$\omega = (x-y)dx - z^2dy + dz$$
auf dem $\mathbb{R}^3$.

a) Berechne die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ auf dem $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

b) Berechne das Wegintegral zur Differentialform $\varphi^*\omega$ zum Weg γ in Abhängigkeit von c.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 83.14. (6 Punkte)

Wir betrachten die Einheitskugel $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei die Koordinaten des $\mathbb{R}^3$ mit x, y, z bezeichnet seien. Für welche Punkte $P \in S^2$ bilden die Einschränkungen von dx und dy auf S^2 eine Basis des Kotangentialraums $T_P^*S^2$.

Aufgabe 83.15. (4 Punkte)

Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie. Es sei ω eine positive Volumenform auf M und es sei μ das durch diese Volumenform definierte Maß auf M. Zeige, dass dann jede abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension $\leq n-1$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 83.16. (4 Punkte)

Seien $a, b, c, d, r, s \geq 1$ natürliche Zahlen. Wir betrachten die stetig differenzierbare Kurve
$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^r, t^s).$$
Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zur Differentialform
$$\omega = x^a y^b dx + x^c y^d dy\,.$$

Aufgabe 83.17. (5 Punkte)

Sei
$$\gamma\colon\ [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (\cos t\,,\ \sin t\,, t),$$
gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zur Differentialform
$$\omega = (y-z^3)dx + x^2dy - xzdz\,.$$