Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 82

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 82.1. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel T^*M. Zeige, dass man auf $\bigwedge^k T^*M$ für jedes k eine Topologie erklären kann, bei der für jede Karte $\alpha\colon U \to V$ die Abbildung

$$\bigwedge^k T^*U \longrightarrow \bigwedge^k T^*V \cong V \times \bigwedge^k \mathbb{R}^{n*}$$

eine Homöomorphie ist.

Damit kann man von stetigen und auch von messbaren Differentialformen sprechen.

Aufgabe 82.2. Es sei M eine C^2-differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel T^*M. Zeige, dass $\bigwedge^k T^*M$ für jedes k eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Damit kann man auch von stetig differenzierbaren Differentialformen sprechen. Allgemeiner gilt: Wenn M eine C^m-Mannigfaltigkeit und $\ell < m$ ist, so bezeichnet man mit $\mathcal{E}^k_\ell(U)$ die Menge der ℓ-fach stetig differenzierbaren k-Differentialformen.

Aufgabe 82.3. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{E}^k(M)$ die Menge der k-Formen auf M. Zeige, dass $\mathcal{E}^k(M)$ ein R-Modul zu $R = C^0(M,\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 82.4. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $P \in M$ ein Punkt und $f \in C^1(M,\mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei $v \in T_PM$ ein Tangentialvektor, der durch einen differenzierbaren Weg

$$\gamma\colon\ ]-\delta,\delta[\longrightarrow M$$

mit $\gamma(0) = P$ repräsentiert werde. Zeige die Gleichheit

$$(df)(P,v) \,=\, (f \circ \gamma)'(0).$$

Aufgabe 82.5. Es sei $i : M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Zeige, dass für eine differenzierbare Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Beziehung

$$i^*(df) \,=\, d(f \circ i)$$

gilt.

Aufgabe 82.6.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y,z) \longmapsto (xyz^2, xy - z^3).$$

Berechne die Matrix der Abbildung

$$\bigwedge^2 T_P(\varphi)\colon\ \bigwedge^2 T_P\mathbb{R}^3 \longrightarrow \bigwedge^2 T_{\varphi(P)}\mathbb{R}^2$$

im Punkt $P = (1,3,5)$ bezüglich einer geeigneten Basis.

Aufgabe 82.7. Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\, (u,v) \longmapsto (u^2, v^3 - u),$$

und die 2-Differentialform

$$\omega \,=\, \frac{1}{x^2+y^2} dx \wedge dy.$$

Bestimme die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$.

Aufgabe 82.8. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

eine stetig differenzierbare Funktion und es sei $\omega = g(s)ds$ eine 1-Differentialform auf $\mathbb{R}$. Bestimme $f^*\omega$.

Aufgabe 82.9.*

Berechne die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\tau$ zu

$$\tau = dx \wedge dy \wedge dz - wdx \wedge dy \wedge dw + \cos{(xy)}\, dx \wedge dz \wedge dw - ywdy \wedge dz \wedge dw$$

unter der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\, (r,s,t) \longmapsto (r^2 s, t, \sin r, e^{st}) = (x,y,z,w).$$

Aufgabe 82.10.*

Es sei

$$\psi\colon L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, es sei

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion auf M und ω eine k-Form auf M. Zeige

$$\psi^*(f\omega) \,=\, \psi^*(f)\psi^*\omega.$$

Aufgabe 82.11.*

Es seien $W \subseteq \mathbb{R}^m$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei

$$\psi\colon W \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Folgere aus der Kettenregel, dass

$$d(\psi^* f) = \psi^*(df)$$

gilt, wobei ψ^* das Zurückziehen von Differentialformen bezeichnet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 82.12. (6 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel T^*M. Es sei ω eine k-Differentialform, also eine Abbildung

$$\omega\colon M \longrightarrow \bigwedge^k T^*M$$

mit $\omega(P) \in \bigwedge^k T_P^*M$ für alle $P \in M$, wobei dieses Dachprodukt mit der natürlichen Topologie (siehe Aufgabe 82.1) versehen sei. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) ω ist stetig.
(2) Für jede Karte $\alpha\colon U \to V$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und mit der lokalen Darstellung $\alpha_*\omega = \sum_{J,\, \#(J)=k} f_J dx_J$ sind die Funktionen f_J stetig.
(3) Es gibt eine offene Überdeckung $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit Kartengebieten U_i derart, dass in den lokalen Darstellungen $\alpha_{i*}\omega = \sum_{J,\, \#(J)=k} f_{iJ} dx_J$ die Funktionen f_{iJ} stetig sind.

Aufgabe 82.13. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten L und M. Es seien $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ und $\tau \in \mathcal{E}^\ell(M)$ Differentialformen auf M. Zeige die Gleichung

$$\varphi^*(\omega \wedge \tau) \,=\, \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\tau.$$

Aufgabe 82.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow N = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, z \neq 0\right\}$$
$$(u,v,w) \longmapsto (uvw, u^2 - vw^5, u^2 + v^2 + w^2),$$

und die 2-Differentialform

$$\omega = z^2 dx \wedge dy + \frac{xy}{z} dx \wedge dz + (xe^y - z) dy \wedge dz$$

auf N. Bestimme die zurückgezogene Differentialform $\varphi^* \omega$.

Aufgabe 82.15. (6 Punkte)

Wir betrachten die Einheitskugel $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei die Koordinaten des $\mathbb{R}^3$ mit x, y, z bezeichnet seien. Für welche Punkte $P \in S^2$ bilden die Einschränkungen von dx und dy auf S^2 eine Basis des Kotangentialraums $T_P^* S^2$.