Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 79

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 79.1. Zeige, dass das Produkt $M \times N$ von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N selbst wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 79.2. Es seien $M_1 \subseteq N_1$ und $M_2 \subseteq N_2$ abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten. Zeige, dass ihr Produkt $M_1 \times M_2$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $N_1 \times N_2$ ist.

Aufgabe 79.3. Beschreibe die Karten auf dem Torus $S^1 \times S^1$, die von den stereographischen Projektionen herrühren.

Aufgabe 79.4. Zeige, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ diffeomorph zu einem Produkt aus eindimensionalen Mannigfaltigkeiten ist.

Aufgabe 79.5. Zeige, dass das Produkt $M \times N$ von zwei wegzusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N wieder wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 79.6. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\varphi\colon M \longrightarrow M \times M,\ x \longmapsto (x, x),$$

die Diagonalabbildung in das Produkt $M \times M$. Zeige, dass die Diagonale $\varphi(M)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 79.7. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die Vertauschungsabbildung

$$M \times M \longrightarrow M \times M,\ (P, Q) \longmapsto (Q, P),$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 79.8. Beschreibe den Torus $S^1 \times S^1$ als Rotationsmenge im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 79.9. Sei $R > 0$ und betrachte die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 .$$

Bestimme die regulären Punkte der Abbildung und die Gestalt der Faser über $s \in \mathbb{R}$. Wie ändert sich die Gestalt beim Übergang von $\sqrt{s} < R$ zu $\sqrt{s} > R$.

Aufgabe 79.10. Definiere die Abbildung

$$S^1 \times S^1 \longrightarrow S^2,$$

die zu einem Winkelpaar (α, β) die erste Komponente als Äquatorpunkt interpretiert und von dort aus mit der zweiten Komponente auf dem Großkreis Richtung Norden wandert. Ist die Abbildung differenzierbar? Wie sehen die Fasern der Abbildung aus?

Aufgabe 79.11. Man gebe ein heuristisches Argument, dass die Einheitssphäre S^2 und der Torus $S^1 \times S^1$ nicht homöomorph sind.

Aufgabe 79.12. Zu welcher differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist $S^1 \times S^1 \setminus \triangle$, also der Torus ohne die Diagonale, diffeomorph?

Aufgabe 79.13.*

Sei X ein Torus. Man gebe eine surjektive differenzierbare Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$$

an derart, dass auch die Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi)\colon\ T_P\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\varphi(P)}X$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ surjektiv ist.

Aufgabe 79.14. Betrachte die Kreislinie S^1. Definiere eine *differenzierbare Gruppenstruktur* auf S^1, also ein neutrales Element $P \in S^1$, eine differenzierbare Abbildung

$$\alpha\colon\ S^1 \longrightarrow S^1,\ x \longmapsto \alpha(x),$$

und eine differenzierbare Abbildung

$$T = S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1,\ (x,y) \longmapsto \varphi(x,y),$$

derart, dass S^1 mit diesen Daten zu einer kommutativen Gruppe wird.

Aufgabe 79.15. Betrachte die allgemeine lineare Gruppe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ als offene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$. Definiere eine *differenzierbare Gruppenstruktur* auf G, also ein neutrales Element $P \in G$, eine differenzierbare Abbildung

$$\alpha\colon\ G \longrightarrow G,\ x \longmapsto \alpha(x),$$

und eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi\colon\, G \times G \longrightarrow G,\, (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

derart, dass G mit diesen Daten zu einer Gruppe wird.

Aufgabe 79.16. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon\, S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R},\, (x_1, x_2; t) \longmapsto (-x_1, -x_2; -t),$$

ein fixpunktfreier Diffeomorphismus ist, der zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 79.17. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und M eine Menge mit zwei Verknüpfungen

$$+\colon\, M \times M \longrightarrow M$$

und

$$\cdot\colon\, K \times M \longrightarrow M.$$

Es sei

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$$

für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$. Zeige, dass M ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 79.18. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige die Gleichheit $V = \bigwedge^1 V$.

Aufgabe 79.19. Sei K ein Körper und V ein m-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei $n > m$. Zeige $\bigwedge^n V = 0$.

Aufgabe 79.20. Zeige, dass die Antipodenabbildung

$$S^n \longrightarrow S^n,\, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto (-x_1, \ldots, -x_{n+1}),$$

ein fixpunktfreier Diffeomorphismus ist, der zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 79.21. Zeige, dass eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 1$ unendlich viele Diffeomorphismen

$$\varphi\colon\, M \longrightarrow M$$

besitzt.

Aufgabe 79.22.*

Man gebe ein stetiges Vektorfeld auf S^2 an, das nur eine Nullstelle besitzt.

AUFGABE 79.23. Die Einheitssphäre S^2 bewege sich in einer Sekunde vollständig (vom Nordpol aus gesehen gegen den Uhrzeigersinn) um die Polachse. Welche differenzierbare Kurve und welcher Tangentialvektor an einen Punkt $P \in S^2$ gehört zu dieser Bewegung? Beschreibe das zugehörige Vektorfeld

$$S^2 \longrightarrow TS^2 \subseteq T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6 .$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 79.24. (5 Punkte)

Sei $0 < r < R$ und sei

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, \left(\sqrt{x^2+y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\} .$$

Zeige, dass die Abbildung

$S^1 \times S^1 \longrightarrow T$, $(\varphi, \psi) \longmapsto ((R + r \cos \psi) \cos \varphi , (R + r \cos \psi) \sin \varphi , r \sin \psi)$

eine Bijektion ist.

AUFGABE 79.25. (6 Punkte)

Sei T ein Torus und seien $P, Q \in T$ zwei Punkte. Zeige, dass es eine gemeinsame Kartenumgebung $P, Q \in U \subseteq T$ derart gibt, dass die Kartenabbildung

$$\alpha \colon U \longrightarrow V$$

eine Homöomorphie mit $V =]0,1[\times]0,1[$ ergibt.

AUFGABE 79.26. (4 Punkte)

Drücke das Dachprodukt

$$4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

im $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Dachprodukte $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$ und $e_2 \wedge e_3$ aus.

Aufgabe zum Hochladen

AUFGABE 79.27. (10 Punkte)

Erstelle eine Animation, die Aufgabe 79.9 illustriert.