Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 78

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 78.1. Zeige, dass

$$M = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\, x + x^2y + z^2 + t^3 = 0\right\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 78.2. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Rotationsfläche des Graphen von f eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 78.3. Zeige, dass die Menge aller reellen $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1 eine (n^2-1)-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist.

Aufgabe 78.4. Man gebe ein Beispiel einer abgeschlossenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, die keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 78.5. Bestimme die abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 78.6. Bestimme die abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten von S^1.

Aufgabe 78.7. Es seien M und N zwei disjunkte abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass deren Vereinigung $M \cup N$ ebenfalls eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist, und dass diese Aussage ohne die Voraussetzung der Disjunktheit nicht gilt.

Aufgabe 78.8. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass der Graph $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Aufgabe 78.9.*

Es sei $M \neq \emptyset$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Zeige, dass es eine Kette von abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

derart gibt, dass die abgeschlossene Untermannigfaltigkeit M_i die Dimension i besitzt.

Aufgabe 78.10. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Es sei $T_P(i)$ die Tangentialabbildung zur Inklusion

$$i \colon M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und γ ein differenzierbarer Weg in M mit

$$\gamma(0) = P.$$

Zeige, dass in $\mathbb{R}^n \cong T_P\mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$T_P(i)([\gamma]) = (i \circ \gamma)'(0)$$

gilt.

Aufgabe 78.11. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\pi \colon TM \longrightarrow M$$

das Tangentialbündel. Zeige, dass diese Projektionsabbildung stetig ist.

Aufgabe 78.12. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei $\varphi \colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi) \colon TM \longrightarrow TN$$

stetig ist.

Aufgabe 78.13. Es sei TM das Tangentialbündel zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Zeige, dass die Mengen $(T(\alpha))^{-1}(V \times W)$ zu allen Karten

$$\alpha \colon U \longrightarrow V$$

mit $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen eine Basis der Topologie auf dem Tangentialbündel bilden.

Aufgabe 78.14. Berechne die Tangentialabbildung $T\varphi$ zu

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (x^2y - 3xz^3 + y^2, x \sin y - e^{yz})$$

unter Verwendung der Identifizierungen $T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und $T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 78.15. Man gebe ein Beispiel einer differenzierbaren Kurve

$$\gamma \colon [0,1[\longrightarrow S^1$$

derart, dass der Grenzwert $\lim_{t \to 1} \gamma(t)$ existiert, dass aber der Grenzwert $\lim_{t \to 1} (\gamma(t), T_t(\gamma)(1))$ in TS^1 nicht existiert.

Aufgabe 78.16. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Interpretiere die Hintereinanderschaltung

$$TM \longrightarrow T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{+} \mathbb{R}^n .$$

Aufgabe 78.17. Zeige, dass die Abbildung

$$TS^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ ((a,b), t(-b,a)) \longmapsto (a,b) + t(-b,a),$$

für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ außerhalb der Einheitskreisscheibe zwei Urbildpunkte, auf dem Einheitskreis einen Urbildpunkt und innerhalb der offenen Einheitskreisscheibe keinen Urbildpunkt besitzt. Man interpretiere dies geometrisch.

Aufgabe 78.18. Es sei $M \subseteq N$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der differenzierbaren Mannigfaltigkeit N. Zeige, dass $TM \subseteq TN$ eine abgeschlossene Teilmenge ist.

Aufgabe 78.19. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$$\varphi\colon\ G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine differenzierbare Abbildung und M die Faser über $0 \in \mathbb{R}^m$. Es sei vorausgesetzt, dass das totale Differential in jedem Punkt dieser Faser surjektiv sei. Zeige, dass für $P \in M$ der Tangentialraum im Sinne von Definition 53.7 mit dem Tangentialraum der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M im Punkt P übereinstimmt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 78.20. (8 (3+3+2) Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$.

a) Zeige, dass die Menge

$$M = \left\{(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 \mid ux^m + vy^n = 1\right\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,u,v) \longmapsto (x,y),$$

differenzierbar und in jedem Punkt $P \in M$ regulär ist.

c) Beschreibe die Fasern von φ.

Aufgabe 78.21. (10 (2+3+5) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto (x^2, x^3).$$

a) Zeige, dass diese Abbildung differenzierbar und injektiv ist.

b) Zeige, dass φ nicht in jedem Punkt regulär ist.

c) Zeige, dass das Bild von φ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist, aber keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 78.22. (4 Punkte)

Zeige, dass es eine Homöomorphie des Tangentialbündels T_{S_1} der 1-Sphäre S^1 mit dem Produkt $S^1 \times \mathbb{R}$ gibt.

Aufgabe 78.23. (5 Punkte)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\pi\colon TM \longrightarrow M$$

das Tangentialbündel. Zeige, dass TM selbst in natürlicher Weise eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

In der folgenden Aufgabe wird der Begriff eines R-Moduls verwendet (das ist eine direkte Verallgemeinerung des Vektorraumsbegriffes).

Sei R ein kommutativer Ring und $M = (M, +, 0)$ eine *additiv* geschriebene kommutative Gruppe. Man nennt M einen *R-Modul*, wenn es eine Operation

$$R \times M \longrightarrow M,\ (r, v) \longmapsto rv = r \cdot v\,,$$

(*Skalarmultiplikation* genannt) gibt, die folgende Axiome erfüllt (dabei seien $r, s \in R$ und $u, v \in M$ beliebig):

(1) $r(su) = (rs)u$,
(2) $r(u + v) = (ru) + (rv)$,
(3) $(r + s)u = (ru) + (su)$,
(4) $1u = u$.

Aufgabe 78.24. (4 Punkte)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $R = C^1(M, \mathbb{R})$ der Ring der differenzierbaren Funktionen auf M und sei F die Menge aller Vektorfelder auf M.

a) Definiere eine Addition auf F derart, dass F zu einer kommutativen Gruppe wird.

b) Definiere eine Skalarmultiplikation

$$R \times F \longrightarrow F,\ (f, s) \longmapsto fs,$$

derart, dass F zu einem R-Modul wird.