Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 77

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 77.1. Zeige, dass man jeden Tangentialvektor $v \in T_P S^2$ in einem Punkt P auf der Einheitssphäre durch einen „uniformen" differenzierbaren Weg auf einem Großkreis realisieren kann.

Aufgabe 77.2. Man gebe möglichst einfache Realisierungen für die Tangentialvektoren in einem Punkt $P = (s, t)$ auf dem Zylindermantel $S^1 \times \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 77.3. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in M$ und $Q = \varphi(P)$ und es seien

$$\gamma_1, \gamma_2\colon I \longrightarrow M$$

zwei differenzierbare Kurven mit einem offenen Intervall $0 \in I$ und $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$. Es seien γ_1 und γ_2 im Punkt P tangential äquivalent. Zeige, dass auch die Verknüpfungen $\varphi \circ \gamma_1$ und $\varphi \circ \gamma_2$ tangential äquivalent in Q sind.

Aufgabe 77.4. Man gebe ein Beispiel einer injektiven, nicht surjektiven, differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi)\colon T_P\mathbb{R} \longrightarrow T_{\varphi(P)}\mathbb{R}$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Aufgabe 77.5. Man gebe ein Beispiel einer surjektiven, nicht injektiven, differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon\ S^1 \longrightarrow S^1$$

derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi)\colon\ T_P S^1 \longrightarrow T_{\varphi(P)} S^1$$

in jedem Punkt $P \in S^1$ bijektiv ist.

Aufgabe 77.6. Zeige, dass auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit die Addition von Wegen

$$\gamma_1, \gamma_2\colon\ I \longrightarrow M$$

mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P \in M$, die man durch eine Karte

$$\alpha\colon\ U \longrightarrow V$$

mit $\alpha(P) = 0$ aus der Addition im $\mathbb{R}^n$ erhalten kann, im Allgemeinen von der gewählten Karte abhängt.

Aufgabe 77.7. Zeige, dass die Tangentialabbildung $T_P(\varphi)$ zu

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^1 \longrightarrow S^1,\ t \longmapsto (\cos t\,,\ \sin t\,),$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Aufgabe 77.8. Man gebe ein Beispiel einer surjektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi)\colon\ T_P M \longrightarrow T_{\varphi(P)} N$$

in einem Punkt $P \in M$ nicht surjektiv ist.

Aufgabe 77.9. Man gebe ein Beispiel einer injektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi)\colon\ T_P M \longrightarrow T_{\varphi(P)} N$$

in einem Punkt $P \in M$ nicht injektiv ist.

AUFGABE 77.10. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Wir betrachten die folgende Menge.

$$T = \left\{ (U, f) \,|\, U \subseteq M \text{ offen}, \, P \in U, \, f \in C^1(U, \mathbb{R}) \right\} .$$

Wir betrachten die Relation

$(U, f) \sim (V, g) :$ es gibt eine offene Menge W mit $P \in W \subseteq U \cap V$ mit $f|_W = g|_W$.

(1) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf T ist.
(2) Zeige, dass es eine natürliche Ringstruktur auf der Menge der Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation gibt.

AUFGABE 77.11. Es sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und

$$\varphi \colon X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Mengensystem

$$\mathcal{T} = \left\{ V \subseteq Y \,|\, \varphi^{-1}(V) \text{ ist offen in } X \right\}$$

eine Topologie auf Y definiert, bezüglich der φ stetig ist.

Die in der vorstehenden Aufgabe eingeführte Topologie nennt man *Bildtopologie*.

AUFGABE 77.12. Zeige, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ durch

$$P \sim Q, \text{ falls } P - Q \in \mathbb{Z}^n$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird. Die Quotientenmenge

$$Y = \mathbb{R}^n / \sim = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$$

sei mit der Bildtopologie zur Quotientenabbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to Y$ versehen. Zeige, dass Y ein Hausdorff-Raum ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 77.13. (4 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$. Zeige, dass für eine differenzierbare Kurve

$$\gamma \colon I \longrightarrow M$$

mit $\gamma(0) = P$ und $a \in \mathbb{R}$ im Tangentialraum $T_P M$ die Beziehung

$$a[\gamma] = [\lambda]$$

gilt, wobei λ durch $\lambda(t) := \gamma(at)$ definiert sei.

Aufgabe 77.14. (6 Punkte)

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit und $P \in M$. Definiere für C^k-Kurven

$$\gamma_1, \gamma_2 \colon I \longrightarrow M$$

mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$ eine Äquivalenzrelation, die in einer (jeder) Karte die Ableitungen bis zur Ordnung k berücksichtigt. Wie sehen einfache Vertreter dieser Äquivalenzrelation aus? Definiere eine Vektorraumstruktur auf der Quotientenmenge und bestimme die Dimension.

Aufgabe 77.15. (5 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$. Wir sagen, dass zwei Kurven

$$\gamma_1, \gamma_2 \colon I \longrightarrow M$$

mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$ den gleichen *Kurvenkeim* definieren, wenn es ein $\epsilon > 0$ mit

$$\gamma_1 |_{[-\epsilon, \epsilon]} = \gamma_2 |_{[-\epsilon, \epsilon]}$$

gibt.

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Kurven $\gamma \colon I \to M$ mit $\gamma(0) = P$ (und mit verschiedenen offenen Intervallen $0 \in I$) definiert.

b) Zeige, dass differenzierbare Kurven, die den gleichen Kurvenkeim repräsentieren, auch den gleichen Tangentialvektor repräsentieren.

Aufgabe 77.16. (8 Punkte)

Der Quotientenraum $Y = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ sei mit der Bildtopologie versehen. Definiere auf Y eine Mannigfaltigkeitsstruktur durch geeignete Karten. Zeige, dass die Quotientenabbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$$

eine differenzierbare Abbildung ist, und dass die Tangentialabbildung in jedem Punkt ein Isomorphismus ist.