Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 74

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 74.1. Es sei

$$\varphi\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung. Was besagt in dieser Situation die Transformationsformel für Quader und was die Newton-Leibniz-Formel?

Aufgabe 74.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,\ (x,y) \longmapsto (xe^y, -e^{-y}),$$

in jedem Punkt maßtreu, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 74.3. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x+y^2, -y^4-2xy^2-x^2+y^2+x+y),$$

flächentreu ist.

Aufgabe 74.4. Zeige, dass die Transformation

$$[0,2\pi] \times [0,1] \longrightarrow B\left(0,1\right),\ (\alpha, w) \longmapsto (\sqrt{w}\,\cos\,\alpha\,, \sqrt{w}\,\sin\,\alpha\,),$$

auf geeigneten offenen Teilmengen ein Diffeomorphismus ist und berechne die Jacobi-Determinante in jedem Punkt.

Aufgabe 74.5. Es sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit offenen zusammenhängenden Mengen G und H im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass φ genau dann maßtreu ist, wenn die Jacobi-Determinante überall den Wert 1 oder überall den Wert -1 hat.

Aufgabe 74.6.*

Berechne den Flächeninhalt des Bildes des Rechtecks $Q = [-1,3] \times [0,2]$ unter der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^3, y-x^2).$$

Aufgabe 74.7. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Beweise die Volumenformel für den zugehörigen Rotationskörper K mit der Transformationsformel und der Abbildung

$$\varphi\colon [a,b] \times D \longrightarrow K,\ (x,y,z) \longmapsto (x, f(x)y, f(x)z),$$

wobei D die Einheitskreisscheibe bezeichnet.

Aufgabe 74.8.*

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, $P = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt mit $a_{n+1} > 0$ und K_B der zugehörige Kegel. Beweise die Maßformel für den Kegel mit der Transformationsformel und der Abbildung

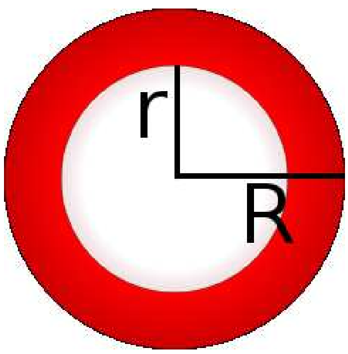
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n \times [0, a_{n+1}] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times [0, a_{n+1}], \\ (x_1, \ldots, x_n, t) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n, 0) + \frac{t}{a_{n+1}}(a_1 - x_1, \ldots, a_n - x_n, a_{n+1}). \end{aligned}$$

Aufgabe 74.9. Sei

$$T = \left\{ (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{\pi}{2} \leq \rho \leq \theta,\ \cos\theta \geq 0,\ \sin\theta \geq 0 \right\}.$$

Berechne den Flächeninhalt von T.

Aufgabe 74.10. Interpretiere die Substitutionsregel als einen Spezialfall der Transformationsformel.



Aufgabe 74.11. Zeige, dass der Flächeninhalt eines Annulus gleich dem Produkt aus der Länge des Mittelkreises und der Breite ist.

Aufgabe 74.12. Zeige, dass bei einer Lipschitz-stetigen Abbildung zwischen Räumen unterschiedlicher Dimension das Bild einer Nullmenge keine Nullmenge sein muss. Wo bricht der Beweis zu Lemma 73.5 zusammen?

Aufgabe 74.13. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und

$$h_1, h_2 \colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

messbare Funktionen. Zeige

$$\int_M h_1 h_2 d\mu = \int_{S(h_1)} h_2 d\mu \otimes \lambda^1,$$

wobei h_2 in natürlicher Weise als Funktion auf dem Subgraphen $S(h_1)$ zu h_1 aufgefasst wird.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 74.14. (4 Punkte)

Berechne den Wert des Quadrats $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; |x|, |y| \leq 1\}$ für das Bildmaß $\mu = \varphi_* \lambda^2$ unter der Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

Aufgabe 74.15. (4 (1+3) Punkte)

Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei

$$\varphi \colon G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus. Es sei

$$f \colon H \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetige Funktion.

a) Definiere einen Diffeomorphismus zwischen den offenen Subgraphen zu f bzw. zu $f \circ \varphi$.

b) Beweise die Transformationsformel für Integrale in diesem Fall direkt aus Satz 74.2, angewendet auf den Subgraphen, mit Hilfe von Aufgabe 74.13.

Aufgabe 74.16. (7 (3+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$[0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto x^2,$$

und interessieren uns für die Straße der Breite 1, deren Mittelstreifen der vorgegebene Funktionsgraph ist.

a) Zeige, dass zu zwei verschiedenen Punkten auf dem Funktionsgraphen die Senkrechten der Länge 1 (mit dem Mittelpunkt auf dem Graphen) untereinander überschneidungsfrei sind.

b) Man gebe eine (möglichst einfache) Parametrisierung der Straße an.

c) Bestimme den Flächeninhalt der Straße.

Abbildungsverzeichnis