Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 73

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 73.1. Berechne das Integral $\int_Q xy \, d\lambda^2$ über dem Quader $Q = [a,b] \times [c,d]$.

Aufgabe 73.2. Es sei G der Subgraph unterhalb der Standardparabel zwischen 1 und 3. Berechne das Integral $\int_G x^2 + xy - y^3 \, d\lambda^2$.

Aufgabe 73.3.*

a) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a,b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c,d]$ addiert?

b) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a,b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c,d]$ multiplizert?

c) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a,b]$ durch eine reelle Zahl aus $[c,d]$ ($c > 0$) dividiert?

Aufgabe 73.4.*

Berechne das Integral zur Funktion

$$f(r,s,t) = s^2 t + r \cos t$$

über dem Einheitswürfel $W = [0,1]^3$.

Aufgabe 73.5.*

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion auf dem Intervall $[0,\pi]$, wobei G mit dem zweidimensionalen Borel-Lebesgue-Maß λ^2 versehen sei. Berechne die beiden folgenden Integrale.

a) $\int_G x \, d\lambda^2$

b) $\int_G y \, d\lambda^2$

Aufgabe 73.6.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x,y) \longmapsto x^2 + y^4.$$

a) Bestimme zu jedem Punkt $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ das Volumen des Körpers

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq x \leq r+1, \, s \leq y \leq s+1, \, 0 \leq z \leq f(x,y) \right\}.$$

b) Zeige, dass das (von (r, s) abhängige) Volumen aus Teil a) in genau einem Punkt (r, s) minimal ist (dieser Punkt muss nicht explizit angegeben werden).

Aufgabe 73.7. Unter einer *Quader-Treppenfunktion* verstehen wir eine Abbildung

$$t\colon [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die es Intervallunterteilungen

$$a_1 = c_{10} < c_{11} < \ldots < c_{1n_1} = b_1, \ldots, a_d = c_{d0} < c_{d1} < \ldots < c_{dn_d} = b_d\,,$$

derart gibt, dass

$$t|_{[c_{1j_1}, c_{1\,j_1+1}] \times \cdots \times [c_{dj_d}, c_{d\,j_d+1}]}$$

konstant ist. Das zugehörige Integral nennen wir Treppenintegral.

Es sei

$$f\colon [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass das Supremum der Treppenintegrale zu unteren Treppenfunktionen von f gleich dem Infimum der Treppenintegrale zu oberen Treppenfunktionen von f ist, und somit auch gleich dem Lebesgue-Integral.

Aufgabe 73.8. Beweise den Satz von Fubini für eine stetige Funktion

$$f\colon [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit Hilfe von Aufgabe 73.7.

Aufgabe 73.9. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare integrierbare Funktion. Zu einem fixierten Startpunkt $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ betrachten wir (für $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}_{\geq a_1} \times \cdots \times \mathbb{R}_{\geq a_d}$) die Abbildung

$$F(x_1, \ldots, x_d) := \int_{[a_1, x_1] \times \cdots \times [a_d, x_d]} f d\lambda^d.$$

a) Sei f stetig. Zeige

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_d} F = f$$

b) Wie ist $F(x_1, \ldots, x_d)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}^d$ zu definieren?

Aufgabe 73.10. Stelle eine Formel für

$$\int_{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]} x_1^{r_1} \cdots x_d^{r_d} d\lambda^d$$

auf und beweise sie

a) mittels dem Satz von Fubini,

b) mittels Aufgabe 73.9,

c) mittels Aufgabe 73.7.

Aufgabe 73.11. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und es sei

$$g\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass die Zuordnung

$$\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0},\, T \longmapsto \int_T g\, d\mu$$

ein Maß auf M ist.

Aufgabe 73.12. Welche Dichte besitzt das Borel-Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Borel-Lebesgue-Maßes?

Aufgabe 73.13. Man gebe ein Beispiel für ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, das keine Dichte bezüglich dem Borel-Lebesgue-Maß besitzt.

Aufgabe 73.14. Es sei $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine stetige Dichte und $\mu = g\lambda^d$ das zugehörige Maß. Zeige, dass für jeden Punkte $P \in \mathbb{R}^d$ die Folge

$$\frac{\mu\left(B\left(P, \frac{1}{n}\right)\right)}{\lambda^d\left(B\left(P, \frac{1}{n}\right)\right)}$$

gegen $g(P)$ konvergiert.

Aufgabe 73.15. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto (x + \sin y\,, y + \cos x\,).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det\, (D\varphi)_P|$ auf dem Quadrat $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Welche Abschätzung ergibt sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q))$?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 73.16. (6 Punkte)

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion zwischen 0 und π. Berechne die Integrale

a) $\int_G x\, d\lambda^2$,

b) $\int_G y\, d\lambda^2$.

Aufgabe 73.17. (5 Punkte)

Berechne das Integral zur Funktion $f(x, y) = x(\sin x\,)(\cos\,(xy))$ über dem Rechteck $Q = [0, 3\pi] \times [0, 1]$.

Aufgabe 73.18. (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (u,v) \longmapsto \frac{2uv}{(u^2+1)(v^2+v+1)}.$$

Für welche Quadrate $Q = [a, a+1] \times [b, b+1]$ der Kantenlänge 1 wird das Integral $\int_Q f\, d\lambda^2$ maximal? Welchen Wert besitzt es?

Aufgabe 73.19. (5 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, es sei

$$g \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare nichtnegative integrierbare Funktion und sei $g\mu$ das Maß zur Dichte g. Zeige, dass für jede messbare Funktion

$$f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Beziehung

$$\int_M f \, d(g\mu) = \int_M fg \, d\mu$$

gilt.

Aufgabe 73.20. (5 Punkte)

Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume, und es seien

$$g \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h \colon N \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare nichtnegative integrierbare Funktionen mit den zu diesen Dichten gehörigen Maßen $g\mu$ und $h\nu$. Zeige, dass auf $M \times N$ das Produktmaß $(g\mu) \otimes (h\nu)$ mit dem Maß zur Dichte

$$gh \colon M \times N \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto g(x)h(y),$$

bezüglich $\mu \otimes \nu$ übereinstimmt.

Aufgabe 73.21. (6 Punkte)

Wir betrachten das Bildmaß $\mu = \varphi_* \lambda^n$ zur Abbildung $(n \geq 1)$

$$\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

a) Zeige, dass μ ein σ-endliches Maß auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Zeige, dass μ bezüglich λ^1 die Dichte

$$h(t) = \begin{cases} 0, \text{ falls } t < 0\,, \\ n\beta_n t^{n-1} \text{ falls } t \geq 0\,, \end{cases}$$

besitzt, wobei β_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Aufgabe 73.22. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x, y) \longmapsto (x^3 - y^2, xy^2).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det\, (D\varphi)_P|$ auf den beiden Quadraten $Q_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ und $Q_2 = [1, 2] \times [1, 2]$. Welche Abschätzungen ergeben sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q_1))$ und für $\lambda^2(\varphi(Q_2))$?