Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 72

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 72.1. Bestimme das Volumen einer gleichseitigen Pyramide (eines *Tetraeders*) mit Seitenlänge 1.

Aufgabe 72.2. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Sinusbogen zwischen 0 und π um die x-Achse gedreht wird.

Aufgabe 72.3.*

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, t \longmapsto t+\sqrt{t}+1,$$

um die t-Achse rotieren lässt.

Aufgabe 72.4. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Standardparabel um die y-Achse gedreht wird und dies mit der Ebene zu $y=h$ „gedeckelt“ wird, in Abhängigkeit von $h \geq 0$.

Aufgabe 72.5. Berechne das Volumen der Einheitskugel mit dem Cavalieri-Prinzip.

Aufgabe 72.6. Fasse die Einheitskugel als Rotationskörper auf und berechne damit ihr Volumen.

Aufgabe 72.7.*

Häuptling Winnetou möchte sich ein neues Tipi über einer quadratischen Grundfläche von 3×3 Metern errichten. Er verwendet dafür vier Stangen mit einer Länge von 5 Metern, die in den Eckpunkten der Grundfläche stehen und sich in der Zeltspitze treffen sollen.

a) Wie viel Quadratmeter Büffelhaut wird für das Zeltdach gebraucht?

b) Wie viel Kubikmeter Rauminhalt hat das neue Zelt?

Aufgabe 72.8. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man aus dem Einheitszylinder, dessen Grundfläche eine Einheitskreisscheibe ist und der die Höhe 1 besitzt, den (offenen) Kegel herausnimmt, der den oberen Zylinderdeckel als Grundfläche und den unteren Kreismittelpunkt als Spitze besitzt.

Aufgabe 72.9.*

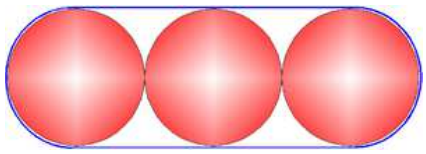
Es sei

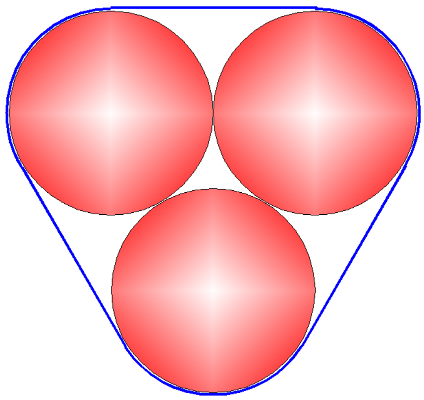
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x),$$

eine positive stetige Funktion (mit $a \leq b$ aus $\mathbb{R}$). Zeige, dass die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers, also die Menge

$$M = \{(x, f(x) \cos \alpha\,, f(x) \sin \alpha\,) |\, x \in [a,b],\, \alpha \in [0, 2\pi[\} \subseteq \mathbb{R}^3\,,$$

das Volumen 0 besitzt.





Aufgabe 72.10.*

Es sollen drei Kugeln mit Radius 1 straff in eine Folie eingepackt werden. Berechne das Volumen des Gesamtpackets, wenn

a) die Kugeln linear und anliegend angeordnet werden,

b) die Kugeln als Dreieck anliegend angeordnet werden.

Aufgabe 72.11. Wo liegt der Fehler in Beispiel 72.4?

Aufgabe 72.12. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge und es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

eine surjektive lineare Abbildung derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ die Menge $T \cap \varphi^{-1}(x)$ abzählbar sei. Zeige

$$\lambda^n(T) \,=\, 0.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 72.13. (5 Punkte)

Es sei K die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in $(0, R)$ und dem Radius $0 < r < R$. Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich K um die x-Achse dreht.

Aufgabe 72.14. (6 Punkte)

Es sei V der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt in $(1, 0)$, dem Radius 1 und den Eckpunkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Berechne das Volumen des „runden Trichters“, der entsteht, wenn man V um die y-Achse dreht.

Aufgabe 72.15. (5 Punkte)

Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(3, 4)$, $(5, 5)$ und $(4, 6)$. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man D um die x-Achse dreht.

Aufgabe 72.16. (5 Punkte)

Es sei $F \neq 0$ ein Polynom in n Variablen über $\mathbb{R}$ und es sei

$$T \,=\, \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, F(x) = 0\}$$

die Nullstellenmenge des Polynoms. Zeige

$$\lambda^n(T) \,=\, 0.$$

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Wurst.png , Autor = Benutzer Benutzer: Rainer_Bielefeld auf Wikipedia.de, Lizenz = GFDL 2

Quelle = Clusterförmige Anordnung.png , Autor = Benutzer Benutzer: Rainer_Bielefeld auf Wikipedia.de, Lizenz = GFDL 2