Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 6

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1. Es sei K ein angeordneter Körper, es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in K. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 6.2. Beweise die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 6.1.

Für die folgende Aufgabe brauchen wir den Begriff der Polynomfunktion.

Es sei K ein Körper und seien $a_0, a_1, \ldots, a_d \in K$. Eine Funktion

$$P\colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto P(x),$$

mit

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$$

heißt *Polynomfunktion*.

Aufgabe 6.3. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ eine Polynomfunktion. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige durch Induktion über d, dass dann auch die durch

$$y_n := P(x_n)$$

definierte Folge konvergiert, und zwar gegen $P(x)$.

Aufgabe 6.4.*

Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6.5. Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$

definierten reellen Folge.

AUFGABE 6.6. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

AUFGABE 6.7.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

AUFGABE 6.8. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

AUFGABE 6.9. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K beschränkt ist.

AUFGABE 6.10. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K, die eine konvergente Teilfolge enthalte. Zeige, dass die Folge konvergiert.

AUFGABE 6.11. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

AUFGABE 6.12. Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in K. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn die Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum besitzt.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $T \subseteq K$ heißt ein *Abschnitt*, wenn für alle $a, b \in T$ mit $a \leq b$ und jedes $x \in K$ mit $a \leq x \leq b$ auch $x \in T$ ist.

AUFGABE 6.13. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass jedes Intervall (einschließlich der unbeschränkten Intervalle) in K ein Abschnitt ist.

Man gebe ein Beispiel für einen Abschnitt in $\mathbb{Q}$, der kein Intervall ist.

Zeige, dass in $\mathbb{R}$ jeder Abschnitt ein Intervall ist.

Die folgende Aufgabe setzt Kenntnisse in linearer Algebra voraus.

Aufgabe 6.14.*

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \,|\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0 \right\}$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.15. (3 Punkte)

Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n = 5\left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 - 4\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3$$

für $n \to \infty$.

Aufgabe 6.16. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die durch

$$y_n := \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

Aufgabe 6.17. (5 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und seien $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q(x) = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6.18. (4 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und sei $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ ein Polynom mit $d \geq 1$ und $a_d \neq 0$. Zeige, dass dann die durch

$$y_n := P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

definierte Folge bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, falls $a_d > 0$ ist, und bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, falls $a_d < 0$ ist.

Man folgere, dass die Folgenglieder

$$\frac{1}{y_n}$$

für n hinreichend groß definiert sind und gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 6.19. (6 Punkte)

Zeige, dass jede Folge in $\mathbb{R}$ eine monotone Teilfolge besitzt.