**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2015**

# Analysis II

## Arbeitsblatt 56

### Übungsaufgaben

Aufgabe 56.1. Es sei $V$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf $U$. Zeige die folgenden Aussagen.

a) Wenn $f$ (als Abbildung) Lipschitz-stetig ist, so genügt das Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung.

b) Wenn das Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt, so sind für jedes feste $t \in I$ die Abbildungen

$$U \longrightarrow V,\ v \longmapsto f(t,v),$$

Lipschitz-stetig.

c) Man gebe Beispiele, die zeigen, dass die Implikationen aus a) und b) nicht umkehrbar sind.

Aufgabe 56.2. Es seien $L$ und $M$ metrische Räume. Zeige, dass die Menge $C$ der stetigen Abbildungen von $L$ nach $M$ durch

$$d(f,g) := \min\left(\sup\left(d(f(x),g(x)), x \in L\right), 1\right)$$

zu einem metrischen Raum wird.

Aufgabe 56.3. Es seien $L$ und $M$ metrische Räume, wobei $M$ vollständig sei. Zeige, dass die Menge $C$ der stetigen Abbildungen von $L$ nach $M$ durch

$$d(f,g) := \min\left(\sup\left(d(f(x),g(x)), x \in L\right), 1\right)$$

zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

Aufgabe 56.4.*

Sei

$$b \geq 1 \geq a > 0$$

fixiert und sei

$$M = \{f : [a,b] \to [a,b] | \, f \text{ stetig}\}.$$

a) Zeige, dass die Abbildung

$$H\colon M \longrightarrow M,\ f \longmapsto H(f) = \sqrt{f},$$

wohldefiniert ist.

b) Sei nun zusätzlich $a > \frac{1}{4}$. Zeige, dass die Abbildung $H$ aus a) eine starke Kontraktion ist (wobei $M$ mit der Maximumsnorm versehen sei).

c) Zeige, dass $M$ durch die Maximumsnorm ein vollständiger metrischer Raum wird.

d) Bestimme den Fixpunkt von $H$.

Aufgabe 56.5. Sei

$$f\colon I \times U \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld, das auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums definiert sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in I$ und $P \in U \cap W$ die Beziehung $f(t,P) \in W$ gilt. Zeige, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t,v) \text{ mit } v(t_0) = w \in U \cap W$$

ganz in $W$ verläuft.

Aufgabe 56.6. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y + 1 \text{ mit } y(0) = 0\,.$$

mit der Picard-Lindelöf-Iteration.

Aufgabe 56.7. Bestimme in Beispiel 56.5 eine explizite Formel für die Iterationen $\varphi_n$.

Aufgabe 56.8.*

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y^2 + t + yt^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Aufgabe 56.9. Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
mit der Anfangsbedingung $x(0) = 2$ und $y(0) = -7$.

Aufgabe 56.10. Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$.

Aufgabe 56.11. Wogegen konvergiert die Picard-Lindelöf-Itertion in der Situation von Bemerkung 56.6, wenn $w$ ein Eigenvektor von $M$ ist?

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 56.12. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld
$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,u,v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$
Bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die nicht-regulären Punkte des Vektorfeldes
$$f_t\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$
Welche Ortspunkte sind zu keinem Zeitpunkt regulär?

Aufgabe 56.13. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem
$$v' = f(t,v) \text{ und } v(1) = (3,2,6)$$
zum ortsunabhängigen Vektorfeld
$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ &(t,x,y,z) \longmapsto t^3(3,1,4) - e^{-2t}(2,-1,7) + (t - t^2e^t)(0,4,5) + (2,2,2). \end{aligned}$$

Aufgabe 56.14. (3 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 4$ und $y(0) = 5$.

Aufgabe 56.15. (4 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = 1$.