Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 55

Übungsaufgaben

Aufgabe 55.1. Formuliere und beweise den „Satz über die surjektive Abbildung“.

Aufgabe 55.2.*

Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (s,t) \longmapsto (s, -s-t^2, t^3) = (x,y,z).$$

a) Erstelle die Jacobi-Matrix von φ.

b) Bestimme die regulären Punkte (s,t) von φ.

c) Zeige, dass $\varphi(s,t)$ die Bedingung

$$(x+y)^3 + z^2 = 0$$

erfüllt.

d) Zeige, dass die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 55.3. Sei (M,d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen $x \in M$ konvergiert. Es sei T eine Menge und es seien

$$f_n\colon T \longrightarrow M,\, t \longmapsto f_n(t) = x_n,$$

die zu x_n gehörenden konstanten Funktionen. Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion

$$f\colon T \longrightarrow M,\, t \longmapsto f(t) = x,$$

konvergiert.

Aufgabe 55.4. Es sei T eine endliche Menge und

$$f_n\colon T \longrightarrow X$$

eine Abbildungsfolge in einen metrischen Raum X. Zeige, dass diese Folge genau dann punktweise konvergiert, wenn sie gleichmäßig konvergiert.

AUFGABE 55.5. Sei (Y, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq Y$ eine Teilmenge. Es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \overline{T}$ und

$$g_n \colon \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Folge von stetigen Funktionen. Zeige, dass diese Folge genau dann gleichmäßig konvergiert, wenn die auf T eingeschränkte Folge $f_n = g_n|_T$ gleichmäßig konvergiert.

AUFGABE 55.6. Sei T eine Menge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei $M = \operatorname{Abb}(T, E)$ versehen mit der Supremumsnorm. Beweise die folgenden Eigenschaften für diese „Norm“ (dabei ist der Wert ∞ erlaubt und sinnvoll zu interpretieren).

(1) $|| f || \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $|| f || = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in M$ gilt

$$|| \lambda f || = |\lambda| \cdot || f || \; .$$

(4) Für $g, f \in M$ gilt

$$|| g + f || \leq || g || + || f || \; .$$

AUFGABE 55.7. Es sei

$$C = C^0([0, 1], \mathbb{R})$$

die Menge der stetigen Funktionen, die mit der Supremumsnorm versehen sei. Skizziere zu $\epsilon > 0$ die offene und die abgeschlossene ϵ-Umgebung von einem $f \in C$.

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$|| - || \colon V \longrightarrow \mathbb{R}, \, v \longmapsto || v ||,$$

heißt *Norm*, wenn die folgenden Eigenschaften für alle $v, w \in V$ gelten.

(1) $|| v || \geq 0$,
(2) $|| v || = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt

$$|| \lambda v || = |\lambda| \cdot || v || \; .$$

(4) Für $v, w \in V$ gilt

$$|| v + w || \leq || v || + || w || \; .$$

Die Norm zu einem Skalarprodukt erfüllt diese Eigenschaften.

Aufgabe 55.8. Es sei T eine Menge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei

$$M = \{f : T \to E | \ ||f||_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von T nach E. Zeige, dass die Supremumsnorm auf M eine Norm ist.

Aufgabe 55.9. Zeige, dass ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum durch

$$d(u, v) := ||u - v||$$

zu einem metrischer Raum wird.

Aufgabe 55.10. Es sei T eine Menge, E ein euklidischer Vektorraum und

$$M = \{f : T \to E | \ ||f||_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von T nach E. Zeige, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M genau dann gegen $f \in M$ gleichmäßig konvergiert, wenn diese Folge im durch die Supremumsnorm gegebenen metrischen Raum M konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 55.11. (5 Punkte)

Es sei

$$\gamma \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine reguläre Kurve. Zeige, dass die Faser über jedem Punkt $c \in \mathbb{R}^n$ endlich ist.

Aufgabe 55.12. (6 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und

$$\varphi \colon G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine in $P \in G$ total differenzierbare Abbildung mit injektivem totalen Differential. Zeige, dass es eine offene Umgebung U von P mit $\varphi^{-1}(\varphi(P)) \cap U = \{P\}$ gibt.

Tipp: Betrachte das totale Differential auf der Einheitssphäre. Der Satz über die injektive Abbildung ist hier nicht anwendbar.

Aufgabe 55.13. (4 Punkte)

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei $C = C^0(T, E)$ der Raum der stetigen Abbildungen von T nach E, versehen mit der Supremumsnorm. Es seien $x_1, \ldots, x_n \in T$ und $y_1, \ldots, y_n \in E$ Punkte. Zeige, dass die Teilmenge

$$\{f \in C \mid f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n\}$$

abgeschlossen in C ist.

Aufgabe 55.14. (4 Punkte)

Es sei $M_k = ((a_{ij})_k)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Folge von reellen $m \times n$-Matrizen und

$$\varphi_k \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die zugehörige Folge von linearen Abbildungen. Zeige, dass die Folgen der Einträge $(a_{ij})_k$ für alle i, j genau dann konvergieren, wenn die Folge der Abbildungen punktweise konvergiert.

Aufgabe 55.15. (4 Punkte)

Sei T eine Menge und

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Folge von Abbildungen. Zeige, dass f_n genau dann gegen eine Grenzabbildung

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

gleichmäßig konvergiert, wenn die Komponentenfunktionen $(f_i)_n$ gleichmäßig gegen f_i konvergieren.