

Analysis II

Übungsaufgaben

AUFGABE 54.1. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum über einem Körper K und es seien L, L_1, \dots, L_m Linearformen auf V . Zeige, dass die Beziehung

$$\bigcap_{i=1}^m \text{kern } L_i \subseteq \text{kern } L$$

genau dann gilt, wenn L zu dem von den L_1, \dots, L_m erzeugten Untervektorraum (im Dualraum) gehört.

AUFGABE 54.2. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = 5x + 3y$$

auf der Ellipse

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}.$$

AUFGABE 54.3. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x^2 y^3$$

unter der Nebenbedingung

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 7y = 100\}.$$

AUFGABE 54.4. Man beweise die Formel aus Beispiel 54.6, indem man den durch die Linearform f gegebenen affinen Unterraum linear parametrisiert und das Optimierungsproblem für h auf dem zugehörigen \mathbb{R}^{n-1} betrachtet.

Man löse die folgende Aufgabe direkt und als eine Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen.

AUFGABE 54.5. Für welche Punkte (t, t^2) der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt $(0, 1)$ minimal?

AUFGABE 54.6. Bestimme sämtliche Tangenten an die Hyperbel

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

AUFGABE 54.7. Zeige, dass durch

$$[0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t),$$

eine bijektive Parametrisierung der Standardastroide

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0 \right\}$$

gegeben ist.

AUFGABE 54.8. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x$$

auf der Standardastroide

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0 \right\}.$$

AUFGABE 54.9. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x$$

auf der Standardastroide

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0 \right\}$$

unter Verwendung der durch $(x, y) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ gegebenen Parametrisierung (siehe Aufgabe 54.7) von M .

AUFGABE 54.10. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

auf

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20 \right\}.$$

AUFGABE 54.11. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$$

auf

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9 \right\}.$$

AUFGABE 54.12. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$$

auf

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 54.13. (4 Punkte)

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y, z) = 3x + 4y + 2z$$

auf dem Ellipsoid

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 4\}.$$

AUFGABE 54.14. (4 Punkte)

Bestimme sämtliche Tangenten an die Astroide

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0\}.$$

AUFGABE 54.15. (6 (1+2+3) Punkte)

Wir betrachten im Einheitswürfel $E = [-1, 1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ eingeschriebene Vierecke mit den Eckpunkten $(-1 \leq a, b \leq 1)$

$$(1, a, -1), (b, 1, -1), (-1, -a, 1), (-b, -1, 1).$$

- (1) Zeige, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen.
- (2) Unter welcher Bedingung an a, b handelt es sich um ein Quadrat?
- (3) Für welche a, b erhält man ein Quadrat mit maximalem Flächeninhalt?

AUFGABE 54.16. (6 Punkte)

Es seien

$$f, g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen derart, dass die Nullfasern

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} \text{ und } N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

disjunkt sind und beide nur reguläre Punkte besitzen. Es sei

$$(P, Q) \in M \times N \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

ein Punktepaar, für das der Abstand zwischen solchen Punkten minimal wird. Zeige, dass die zugehörigen Tangenten parallel sind.