Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 52

Übungsaufgaben

Mit diffeomorph ist im Folgenden stets C^1-diffeomorph gemeint.

Aufgabe 52.1. Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und einer offenen Kugel $U(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 52.2. Zeige, dass eine offene Kreisscheibe $U(P,r) \subseteq \mathbb{R}^2$ $(r > 0)$ und ein offenes Rechteck $]a,b[\times]c,d[$ $(b > a, d > c)$ diffeomorph sind.

Aufgabe 52.3. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Identität ist ein Diffeomorphismus.
(2) Eine lineare bijektive Abbildung ist ein Diffeomorphismus.
(3) Die Umkehrabbildung eines Diffeomorphismus ist wieder ein Diffeomorphismus.
(4) Die Hintereinanderschaltung von Diffeomorphismen ist ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 52.4. Sei

$$U_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und

$$U_2 = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 4v\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

a) Skizziere U_1 und U_2.

b) Zeige, dass U_1 und U_2 offen sind.

c) Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon U_1 \longrightarrow U_2,\ (x,y) \longmapsto (x+y, xy),$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 52.5. Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^2y, x - \sin y).$$

Zeige, dass φ in $P = (1,0)$ regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von $\varphi|_U$ in $\varphi(P)$, wobei U eine offene Umgebung von P sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

Aufgabe 52.6.*

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

Aufgabe 52.7. Seien U, V, W euklidische Vektorräume und seien $\varphi : U \longrightarrow V$ und $\psi : V \longrightarrow W$ differenzierbare Abbildungen. Es sei φ regulär in $P \in U$ und ψ regulär in $Q = \varphi(P) \in V$. Ist dann $\psi \circ \varphi$ regulär in P? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

Aufgabe 52.8. Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2,$$

kann man reell als

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x+iy = (x,y) \longmapsto (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy = (x^2-y^2, 2xy),$$

schreiben. Untersuche φ auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist φ umkehrbar?

Aufgabe 52.9. Finde möglichst große offene Teilmengen $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und $H \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^3,$$

einen Diffeomorphismus von G nach H induziert.

Aufgabe 52.10.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2}\right).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ.

b) Zeige, dass φ in $P = (1,2)$ lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ besitzt, und bestimme das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$.

c) Man gebe alle Punkte $Q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ an, in denen φ nicht lokal invertierbar ist.

Aufgabe 52.11. Zeige, dass die Transformation

$$[0, 2\pi] \times [0, 1] \longrightarrow B(0, 1), \ (\alpha, w) \longmapsto (\sqrt{w} \cos \alpha, \sqrt{w} \sin \alpha),$$

auf geeigneten offenen Teilmengen ein Diffeomorphismus ist und berechne die Jacobi-Determinante in jedem Punkt.

Aufgabe 52.12. Es seien $P_1, \ldots, P_n$ und $Q_1, \ldots, Q_n$ Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass die beiden offenen Mengen $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ zueinander diffeomorph sind.

Aufgabe 52.13. Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\},$$
$$U = \mathbb{R} \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass U und V zueinander diffeomorph sind.

Aufgabe 52.14. Es sei

$$T = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) | \, n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{(0, 0)\},$$
$$U = \mathbb{R}^2 \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass U und V zueinander nicht homöomorph sind.

Aufgabe 52.15.*

Wir betrachten die Abbildung

$\varphi \colon \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \ (a, b, c, d, u, v) \longmapsto (au + bv + c + d, ad - bc, ac - b^2, bd - c^2).$

a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.

b) Zeige, dass φ im Nullpunkt nicht regulär ist.

c) Zeige, dass φ in $(1, 1, 0, 0, 1, 1)$ regulär ist.

Aufgabe 52.16.*

Wir betrachten die Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (x+y+z, xy+xz+yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt $P=(x,y,z)$ genau dann ein regulärer Punkt von F ist, wenn die Koordinaten von P paarweise verschieden (also $x \neq y$, $x \neq z$ und $y \neq z$) sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 52.17. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (x+y+z, xy+xz+yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt (x,y,z) genau dann ein kritischer Punkt von φ ist, wenn in (x,y,z) zwei Zahlen doppelt vorkommen.

Aufgabe 52.18. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (x^2-y^2z, y+\sin xz).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von φ eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.

Aufgabe 52.19. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x, xy).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern (also die Urbilder zu einem Punkt $(u,v) \in \mathbb{R}^2$), das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung. Man gebe möglichst große offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ derart an, dass

$$\varphi|_{U_1}\colon U_1 \longrightarrow U_2$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 52.20. (4 Punkte)

Es seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen mit $0 \in V_1, V_2$ und es sei

$$\varphi\colon U_1 \times V_1 \longrightarrow U_2 \times V_2$$

ein Diffeomorphismus, der eine Bijektion zwischen $U_1 \times \{0\}$ und $U_2 \times \{0\}$ induziert. Zeige, dass dann auch die Einschränkung von φ auf $U_1 \cong U_1 \times \{0\}$ nach $U_2 \cong U_2 \times \{0\}$ ein Diffeomorphismus ist.