Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück SS 2015

Analysis II

Arbeitsblatt 51

Übungsaufgaben

Aufgabe 51.1.*

Finde zwei natürliche Zahlen, deren Summe 65 und deren Produkt 1000 ist.

Aufgabe 51.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,\, (x,y) \longmapsto (x+y, xy),$$

surjektiv ist.

Aufgabe 51.3. Man gebe ein Beispiel einer bijektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon U_1 \longrightarrow U_2$$

mit einer stetigen Umkehrabbildung ψ derart, dass ψ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 51.4.*

Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

das zeigt, dass im Satz über die (lokale) Umkehrbarkeit die Bijektivität im Allgemeinen nur auf echten Teilintervallen besteht.

Aufgabe 51.5. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\, (x,y) \longmapsto (x, e^{x+y}),$$

bijektiv ist. Man gebe explizit eine Umkehrabbildung an.

Aufgabe 51.6. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto (x, y+f(x)),$$

bijektiv ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

Was besagt in der vorstehenden Aufgabe der Satz über die Umkehrabbildung, wenn f differenzierbar ist?

Aufgabe 51.7. Es seien

$$f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Betrachte die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)),$$

Zeige:

(1) Die Abbildung f ist differenzierbar.
(2) Das totale Differential von f in 0 ist genau dann bijektiv, wenn von sämtlichen Funktionen f_i, $i = 1, \ldots, n$, die Ableitungen in 0 nicht 0 sind.
(3) f ist genau dann auf einer offenen Umgebung von 0 bijektiv, wenn die einzelnen f_i in einer geeigneten Umgebung bijektiv sind.

Aufgabe 51.8. Betrachte die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \longmapsto \left(\sin xy\, , yz \cos\left(x^2\right), e^{xyz}\right).$$

Zeige, dass φ im Punkt $P = (1, \pi, 1)$ lokal umkehrbar ist, und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung im Punkt $Q = \varphi(P)$.

Aufgabe 51.9. Es seien $P = a + bX + cY + \ldots$ und $Q = d + eX + fY + \ldots$ Polynome in zwei Variablen und

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y)),$$

die zugehörige Abbildung. Wann besitzt φ in $\varphi(0, 0)$ lokal eine Umkehrabbildung? Wie sieht in diesem Fall das totale Differential der Umkehrabbildung im Punkt $\varphi(0, 0)$ aus?

Im Beweis des Umkehrsatzes wurde mit folgender Definition gearbeitet.

Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$|| \varphi || := \sup\left(|| \varphi(v) ||, || v ||= 1\right)$$

die *Norm* von φ.

Aufgabe 51.10. Begründe, warum die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen wohldefiniert ist.

Aufgabe 51.11. Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es einen Vektor $v \in V$, $\|v\| = 1$, gibt mit

$$\|\varphi(v)\| = \|\varphi\| \ .$$

Aufgabe 51.12. Zeige, dass die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) Es ist $\|\varphi(v)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|v\|$.
(2) Es ist $\|\varphi\| = 0$ genau dann, wenn $\varphi = 0$ ist.
(3) Es ist $\|c\varphi\| = |c| \cdot \|\varphi\|$.
(4) Es ist $\|\varphi_1 + \varphi_2\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$.

Aufgabe 51.13. Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von φ. Zeige, dass die Abschätzung

$$|\lambda| \leq \|\varphi\|$$

gilt.

Aufgabe 51.14. Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung derart, dass eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von φ existiert. Zeige, dass

$$\|\varphi\| = \max\left(|\lambda|, \lambda \text{ ist Eigenwert von } \varphi\right)$$

gilt.

Aufgabe 51.15. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

eine lineare Abbildung $\neq 0$. Bestimme einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ auf der abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, an dem die Funktion

$$B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto |\varphi(v)|,$$

ihr Maximum annimmt. Bestimme die Norm von φ.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 51.16. (4 Punkte)

Man konstruiere ein Beispiel, das zeigt, dass Lemma 51.2 ohne die Voraussetzung, dass mit je zwei Punkten auch die Verbindungsgerade zur Definitionsmenge gehört, nicht gilt.

(Tipp: Man denke daran, wie man flach auf einen steilen Berg kommt.)

Aufgabe 51.17. (2 Punkte)

Seien U_1 und U_2 offene Mengen in euklidischen Vektorräumen V_1 und V_2. Es sei

$$\varphi\colon U_1 \longrightarrow U_2$$

eine bijektive Abbildung, die in einem Punkt $P \in U_1$ differenzierbar sei derart, dass die Umkehrabbildung in $Q = \varphi(P)$ auch differenzierbar ist. Zeige, dass das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist.

Aufgabe 51.18. (3 Punkte)

Seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume, $G \subseteq V_1$ offen und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $U \subseteq G$ eine offene Teilmenge derart, dass für jeden Punkt $P \in U$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist. Zeige, dass dann das Bild $\varphi(U)$ offen in V_2 ist.

Aufgabe 51.19. (4 Punkte)

Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x+y^2, -y^4-2xy^2-x^2+y^2+x+y).$$