Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 49

Übungsaufgaben

Aufgabe 49.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 - y \cdot \sin x\,,$$

im Nullpunkt $(0,0)$.

Aufgabe 49.2.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = e^{x-y^2},$$

im Punkt $(1,1)$.

Aufgabe 49.3.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = e^x yz^2 - xy,$$

im Punkt $(1,0,-1)$.

Aufgabe 49.4.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = e^{\sin x - \cos y}\,,$$

im Punkt $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 49.5. Notiere das Taylor-Polynom für eine (hinreichend oft differenzierbare) Funktion in 2 oder 3 Variablen für die Grade $k = 1,2,3$.

Aufgabe 49.6. Es sei

$$f(x,y) \,=\, x^2y - 3xy + 5y^2 + 4x.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt $P = (1,-2)$ algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen $u = x-1, v = y+2$ aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

AUFGABE 49.7. Es sei f ein Polynom in n Variablen vom Grad $\leq k$. Zeige, dass f mit dem Taylor-Polynom vom Grad $\leq k$ von f im Nullpunkt übereinstimmt.

In den folgenden Aufgaben werden einige Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten besprochen, die eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten sind.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ ein n-Tupel natürlicher Zahlen. Es sei $k := \sum_{j=1}^n r_j$. Dann nennt man die Zahl

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}$$

einen *Polynomialkoeffizienten*.

AUFGABE 49.8. In einem Studium werden 11 Leistungsnachweise verlangt, und zwar 3 Seminarscheine, 5 Klausuren, 2 mündliche Prüfungen und eine Hausarbeit, die in beliebiger Reihenfolge erbracht werden können. Wie viele Reihenfolgen gibt es, um diese Leistungsnachweise zu erbringen?

AUFGABE 49.9. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ mit $\sum_{j=1}^n r_j =: k$. Zeige, dass die Anzahl der Abbildungen

$$\{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\},$$

bei denen das Urbild zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ aus genau r_i Elementen besteht, gleich

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

AUFGABE 49.10. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ mit $\sum_{j=1}^n r_j =: k$. Zeige, dass die Anzahl der k-Tupel

$$(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k,$$

in denen die Zahl i genau r_i-mal vorkommt, gleich

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

AUFGABE 49.11. Zeige, dass die Anzahl der (geordneten) Partitionen zum Anzahltupel $r = (r_1, \ldots, r_n)$ einer k-elementigen Menge gleich

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

Aufgabe 49.12. Es seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Beweise den *Polynomialsatz*, das ist die Gleichung

$$(a_1 + \cdots + a_n)^k = \sum_{r=(r_1,\ldots,r_n),\, \sum_{i=1}^n r_i = k} \binom{k}{r} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}\,.$$

Aufgabe 49.13. Es sei

$$f\colon\, G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, wobei $G \subseteq V$ eine offene Menge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sei. Zeige, dass für $P \in G$ und $v \in V$ die Beziehung

$$\sum_{|r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r \;=\; \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_P\, f(v,v)$$

gilt.

Aufgabe 49.14. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f, g\colon\, G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige durch ein Beispiel, dass das Taylor-Polynom zum Produkt fg im Punkt P vom Grad ≤ 2 nicht das Produkt der beiden Taylor-Polynome von f und g in P vom Grad ≤ 1 sein muss.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 49.15. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto z \cdot \exp(xy),$$

im Nullpunkt $(0,0,0)$.

Aufgabe 49.16. (4 Punkte)

Es sei

$$f(x,y) \;=\; -2xy^3 - 5x^2y^2 + 4xy^2 - 7y + 3.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt $P = (-3,4)$ algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen $u = x+3, v = y-4$ aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

Aufgabe 49.17. (5 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f, g \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei k-mal stetig differenzierbare Funktionen mit den Taylor-Polynomen $T_k(f)$ und $T_k(g)$ in P vom Grad $\leq k$. Zeige, dass das Produkt fg ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist, und dass für das Taylor-Polynom $T_k(fg)$ von fg in P vom Grad $\leq k$ die Beziehung

$$T_k(fg) = (T_k(f) \cdot T_k(g))_{\leq k}$$

besteht, wobei der Subskript $\leq k$ bedeutet, dass das Polynom bis zum Grad k genommen wird.

Aufgabe 49.18. (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $P \in G$ ein Punkt und

$$f \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es maximal ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ vom Grad $\leq k$ mit der Eigenschaft geben kann, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{|| f(x) - p(x) ||}{|| x ||^k} = 0$$

gilt.