Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 47

Übungsaufgaben

Aufgabe 47.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum von endlicher Dimension. Zeige, dass der Dualraum V^* die gleiche Dimension wie V besitzt.

Aufgabe 47.2. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$. Es sei

$$V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K)$$

der Dualraum zu V. Zeige, dass auf V^* die Koordinatenfunktionen $v_1^*, \ldots, v_n^*$, die durch

$$v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1, \text{ falls } j = k, \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

definiert sind, eine Basis von V^* bilden.

Aufgabe 47.3. Betrachte die Linearform

$$L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

(1) Bestimme den Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3\,,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) |\, 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $\varphi = L|_E$ die Einschränkung von L auf E. Bestimme den Vektor $w \in E$ mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E\,,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E bezeichnet.

Aufgabe 47.4. Zeige, dass ein Skalarprodukt eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

Aufgabe 47.5. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, der mit dem induzierten Skalarprodukt versehen sei. Es sei

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform und $v \in V$ der zugehörige Gradient im Sinne von Lemma 47.5 (3). Zeige, dass der Gradient $u \in U$ zur Einschränkung $f|_U$ die orthogonale Projektion von v auf U ist.

Aufgabe 47.6. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

Aufgabe 47.7. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto x^2y - z^3xe^{xyz},$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 47.8. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \frac{xyz - z^2}{\ln(xy) + z^2},$$

in jedem Punkt $P \in G$ mit $G = \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}$

Aufgabe 47.9. Es sei $(V, \langle -,- \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass f und $(Df)_P$ im Punkt P den gleichen Gradienten besitzen.

Aufgabe 47.10. Es sei $(V, \langle -,- \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum Kern von $(Df)_P$ gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten $\operatorname{Grad} f(P)$ ist.

Aufgabe 47.11. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2+y^2.$$

Aufgabe 47.12.*

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy^2-x.$$

Aufgabe 47.13. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2y-y^2+x.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 47.14. (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2y-x+y^3,$$
im Punkt $P=(1,1)$ in Richtung des Winkels $\alpha \in [0,2\pi]$. Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

Aufgabe 47.15. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto x+\sin(y)-xz.$$

(1) Bestimme den Gradienten G von f im Punkt $P=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle -,- \rangle$.
(2) Es sei
$$E=\{(x,y,z) \mid 2x-y+3z=0\} \subset \mathbb{R}^3$$
und es sei $g=f|_E$ die Einschränkung von f auf E. Bestimme den Gradienten $\tilde{G}$ von g bezüglich der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E.
(3) Zeige, dass $\tilde{G}$ die orthogonale Projektion von G auf E ist.

Aufgabe 47.16. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy^3-xy+\sin y\,.$$

Aufgabe 47.17. (5 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte zur Funktion

$$f(x,y) \,=\, x^4+y^4+2x^2y^2-6y^3-6x^2y+8y^2$$

aus Beispiel 46.9.