Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 46

Übungsaufgaben

Aufgabe 46.1. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine total differenzierbare Abbildung mit $(D\varphi)_P = 0$ für alle $P \in V$. Zeige, dass φ konstant ist.

Aufgabe 46.2. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\, (x,y) \longmapsto \left(xy - 2y^3 + 5,\, x^3 - xy^2 + y\right),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1,2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(4,-3)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 46.3. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\, (x,y,z) \longmapsto (xy - zy + 2z^2,\, \sin(x^2yz)),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1,-1,\pi)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(2,0,5)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 46.4. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\, (x,y) \longmapsto (x + y^2, xy, \exp x),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(3,2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(-1,-7)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 46.5. Bestimme das totale Differential der Determinante

$$\det\colon \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\, M \longmapsto \det M,$$

für $n = 2, 3$ an der Einheitsmatrix.

Aufgabe 46.6.*

Bestätige die Kettenregel für $g \circ f$ für die beiden differenzierbaren Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^3 - t, -t^2),$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy + x + y.$$

Aufgabe 46.7. Bestätige die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (u,v) \longmapsto (u^2v^2, u + \sin v, v^3),$$

und

$$\psi\colon \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (x^2y - z^2, xy^2 + yz \exp x),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ in folgenden Schritten.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{K}^3$ das totale Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das totale Differential von $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(5) Berechne das totale Differential von $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 46.8. Es seien $G \subseteq \mathbb{K}^m$ und $D \subseteq \mathbb{K}^n$ offene Mengen, und $f\colon G \to \mathbb{K}^n$ und $g\colon D \to \mathbb{K}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f in $P \in G$ und g in $f(P) \in D$ total differenzierbar ist. Zeige

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(P) &= \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(P)), \ldots, \frac{\partial g_j}{\partial y_n}(f(P)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(P) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial y_r}(f(P)) \cdot \frac{\partial f_r}{\partial x_i}(P). \end{aligned}$$

Aufgabe 46.9. Es seien $G \subseteq \mathbb{K}^m$ und $D \subseteq \mathbb{K}^n$ offene Mengen, und $f\colon G \to \mathbb{K}^n$ und $g\colon D \to \mathbb{K}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f und g ℓ-fach stetig differenzierbar sind. Zeige, dass auch $g \circ f$ ℓ-fach stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 46.10. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xf(y),$$

genau dann im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar ist, wenn f in 0 stetig ist.

Aufgabe 46.11. Seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und sei $\varphi\colon\ G \to W$ eine Abbildung. Zeige, dass φ genau dann stetig differenzierbar ist, wenn φ total differenzierbar ist und wenn die Abbildung

$$G \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W),\ P \longmapsto (D\varphi)_P\,,$$

stetig ist.

Aufgabe 46.12. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar im Nullpunkt und $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{m\to\infty} h_m = 0,\ \lim_{m\to\infty} \frac{h_m}{||\, h_m\, ||} = v \in \mathbb{R}^n,\ f(h_m) = f(h_k) \text{ für alle } m, k \in \mathbb{N}\,.$$

Zeige, dass v ein Eigenvektor von $(Df)_0$ zum Eigenwert 0 ist.

Aufgabe 46.13. Es seien L und M metrische Räume und es sei $\varphi\colon\ L \to M$ eine stetige Abbildung. Es sei

$$\varphi(P) \,=\, Q$$

und es sei $f\colon\ M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Punkt $Q \in M$ ein lokales Extremum besitze. Zeige, dass

$$f \circ \varphi$$

in P ein lokales Extremum besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 46.14. (5 Punkte)

Wir wollen die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi\colon\ \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (u, v) \longmapsto (uv, u - v, v^2),$$

und

$$\psi\colon\ \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (xyz^2, y\exp(xz)),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ veranschaulichen.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{K}^3$ das totale Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi\colon\ \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das totale Differential von $\psi \circ \varphi\colon\ \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(5) Berechne das totale Differential von $\psi \circ \varphi\colon\ \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 46.15. (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$$

mit

$$f(u,v) = (u^2, uv, u - v^2)\,,$$

$$g(x,y,z) = (x + y^2 - z, x^2yz)\,,$$

und

$$h(r,s) = (r^2s, s^2)\,.$$

Berechne das totale Differential von $h \circ g \circ f$ in einem beliebigen Punkt $P = (u,v)$ auf vier verschiedene Arten.

Aufgabe 46.16. (5 Punkte)

Untersuche die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ bei } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \text{ bei } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

auf partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 46.17. (3 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei $\varphi\colon V \to V$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Verschiebung ist, also von der Art $P \mapsto P + v$ mit einem festen Vektor $v \in V$, wenn

$$(D\varphi)_P = \mathrm{Id}_V$$

für alle $P \in V$ ist.

Aufgabe 46.18. (4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ P \longmapsto \| f(P) \|,$$

differenzierbar ist und bestimme das totale Differential davon.

Aufgabe 46.19. (10 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine differenzierbare Kurve $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für die die Richtungsableitung in jede Richtung existiert, derart, dass die Verknüpfung $f \circ \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht differenzierbar ist.