Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 44

Übungsaufgaben

Aufgabe 44.1. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(x^3y - x^2, x^4y^2 - 3xy^3 + 5y\right).$$

Aufgabe 44.2. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto \left(x^2yz^3 - \sin x\,, \exp\left(x^4y\right) - 2x^2z^3 \cos\left(xy^2z\right)\right).$$

Aufgabe 44.3. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Aufgabe 44.4.*

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{\sin x}{x^2+y^4}, \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \ln\left(x^2+y^2\right)\right),$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 44.5. Bestimme sämtliche höheren Richtungsableitungen der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto x^2y^3 - x^3y,$$

die sich mit den beiden Standardrichtungen $(1,0)$ und $(0,1)$ ausdrücken lassen.

Aufgabe 44.6. Beschreibe die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2,$$

in reellen Koordinaten und bestimme die Jacobi-Matrix. Ebenso für z^3, z^4, z^5.

Aufgabe 44.7. Zeige, dass eine Polynomfunktion $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 44.8.*

Man gebe ein Beispiel für eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

die im Nullpunkt partiell differenzierbar ist und dort die Eigenschaft besitzt, dass die Richtungsableitung in keine Richtung $v = (a, b)$ mit $a, b \neq 0$ existiert.

Aufgabe 44.9.*

Es seien P, Q zwei komplexe (bzw. reelle) Polynome und

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y)),$$

die zugehörige Abbildung. Die Determinante der Jacobi-Matrix zu φ sei in jedem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ von 0 verschieden.

(1) Zeige, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Determinante konstant ist.
(2) Zeige durch ein Beispiel, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Determinante nicht konstant sein muss.

Aufgabe 44.10.*

Zeige für Polynomfunktionen

$$f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

direkt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gilt.

Aufgabe 44.11. Zeige, dass keine partiell differenzierbare Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^2$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 44.12. Es seien V und W endlichdimensionale, $\mathbb{K}$-Vektorräume $G \subseteq V$ offen und

$$\varphi\colon G \longrightarrow W$$

eine n-mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Auswahl von n Vektoren aus V. Zeige, dass dann für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(\ldots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) = D_{v_{\sigma(n)}}(\ldots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi))$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 44.13. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(\sin\, xy\,, x^2y^3z^4 - y\, \sinh\, z\,, xy^2z + 5 \right).$$

Aufgabe 44.14. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (x,y) in Richtung $(2,5)$. Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor $(2,5)$ anwendet.

Aufgabe 44.15. (3 Punkte)

Zeige, dass keine partiell differenzierbare Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 44.16. (4 Punkte)

Sei

$$f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass sämtliche k-ten Richtungsableitungen 0 sind.

Aufgabe 44.17. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \varphi(x,y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\varphi(P) \,=\, 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass

$$\varphi(x,y) \;=\; f(x)+g(y)$$

gilt.

Aufgabe 44.18. (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \text{ für } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, und dass

$$D_1D_2f(0,0) \;\neq\; D_2D_1f(0,0)$$

gilt.