**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2015**

# Analysis II

## Arbeitsblatt 43

### Übungsaufgaben

Aufgabe 43.1. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy,$$

(1) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(2,5)$,
(3) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(4) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(0,1)$,
(5) im Punkt $(2,3)$ in Richtung $(-1,0)$,
(6) im Punkt $(3,7)$ in Richtung $(5,-4)$.

Aufgabe 43.2. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \frac{x}{y},$$

(1) im Punkt $(0,1)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,1)$ in Richtung $(0,1)$,
(3) im Punkt $(1,3)$ in Richtung $(2,4)$,
(4) im Punkt $(-1,6)$ in Richtung $(-3,-1)$,
(5) im Punkt $\left(1, \frac{1}{100}\right)$ in Richtung $(0,-1)$.

Aufgabe 43.3.*

Bestimme zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto t^2,$$

die Richtungsableitung in Richtung 3 für jeden Punkt.

Aufgabe 43.4. Sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass $f$ in einem Punkt $P \in \mathbb{R}$ genau dann differenzierbar ist, wenn $f$ in $P$ in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1 f)(P) = f'(P)$$

gilt.

Aufgabe 43.5. Bestimme die Richtungsableitung einer Abbildung in Richtung 0.

Aufgabe 43.6. Seien $V$ und $W$ endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $f\colon G \to W$ eine Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass $f$ in $P$ in Richtung $v$ genau dann differenzierbar ist, wenn die (auf einem Intervall bzw. einer offenen Ballumgebung um $0 \in \mathbb{K}$ definierte) Kurve

$$g\colon I \longrightarrow W,\ t \longmapsto g(t) = f(P + tv),$$

differenzierbar ist, und dass in diesem Fall die Gleichheit

$$(D_v f)(P) = g'(0)$$

gilt.

Wie muss dabei das Intervall gewählt werden?

Aufgabe 43.7. Bestimme, für welche Richtungen die Richtungsableitung im Nullpunkt zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

existieren.

Aufgabe 43.8. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

existiert.

Aufgabe 43.9. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^2$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto |x + y|,$$

existiert.

Aufgabe 43.10. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

im Nullpunkt $(0, 0)$ auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade $G$ durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von $f$ auf $G$ im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

Aufgabe 43.11. Es seien $V$ und $W$ euklidische Vektorräume und

$$f, g\colon\, G \longrightarrow W$$

seien Abbildungen auf einer offenen Menge $G \subseteq V$, die in Richtung $v \in V$ differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$h\colon\, G \longrightarrow \mathbb{R},\, P \longmapsto \langle f(P), g(P)\rangle,$$

in Richtung $v \in V$ differenzierbar ist, und dass

$$(D_v h)(P) \,=\, \langle f(P), (D_v g)(P)\rangle + \langle (D_v f)(P), g(P)\rangle$$

gilt.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 43.12. (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 \sin y \,-\, e^x y - x,$$

(1) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(0,1)$,
(3) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(2,0)$,
(4) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,-3)$,
(5) im Punkt $(1,1)$ in Richtung $(1,1)$,
(6) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(-1,\frac{1}{2})$,
(7) im Punkt $(5,7)$ in Richtung $(1,0)$,
(8) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(5,7)$.

Aufgabe 43.13. (2 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) |\, x^2 + y^3 = 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto \frac{x^2 - xy + y^4}{x^2 + y^3},$$

(1) im Punkt $(1,1)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,1)$ in Richtung $(0,1)$,
(3) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(0,1)$,
(4) im Punkt $(3,-2)$ in Richtung $(2,-5)$.

Aufgabe 43.14. (5 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion ($r_i \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1, \ldots, a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1, \ldots, v_n)\,.$$

Aufgabe 43.15. (4 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 43.14, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi\colon\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

zu einer fixierten Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $D_v\varphi$ existiert und selbst polynomial ist.

Aufgabe 43.16. (3 Punkte)

Seien $V$ und $W$ endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt, $v \in V$ ein Vektor und sei

$$f\colon\, G \longrightarrow W$$

eine Abbildung, die im Punkt $P$ in Richtung $v$ differenzierbar sei. Zeige, dass $f$ auch in Richtung $cv$ mit $c \in \mathbb{K}$ differenzierbar ist und die Beziehung $(D_{cv}f)\,(P) = c\,(D_vf)\,(P)$ gilt.

# Abbildungsverzeichnis