Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 41

Übungsaufgaben

Aufgabe 41.1.*

Es sei
$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow V,\, t \longmapsto \varphi(t),$$
eine Lösung der zeitunabhängigen Differentialgleichung
$$v' = F(t,v) = F(v)$$
zum Vektorfeld
$$F\colon V \longrightarrow V.$$
Zeige, dass auch
$$\psi(t) := \varphi(t+c)$$
zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

Aufgabe 41.2.*

Es sei V ein euklidischer Vektorraum, $u \in V$ ein fixiertrer Vektor und
$$F\colon \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
ein stetiges Vektorfeld mit der Eigenschaft
$$F(t,v) = F(t,v+u)$$
für alle $v \in V$. Es sei
$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow V$$
eine Lösung zur Differentialgleichung
$$v' = F(t,v).$$
Zeige, dass auch
$$\psi(t) := \varphi(t) + u$$
eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 41.3. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung
$$y'' = y\,.$$
Löse damit das Anfangswertproblem
$$y'' = y \text{ mit } y(0) = 3 \text{ und } y'(0) = -2\,.$$

Aufgabe 41.4. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Bestimme zur Schrittweite $s = \frac{1}{k}$ die approximierenden Punkte P_n gemäß des Polygonzugverfahrens. Bestimme insbesondere P_k. Was passiert mit P_k für $k \to \infty$?

Aufgabe 41.5. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ t^5 \end{pmatrix}$$

für $t > 0$.

Aufgabe 41.6. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 41.7. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 41.8. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 41.9. Bestimme alle Lösungen (für $t > 0$) des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & t^3 - t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 41.10. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t^2 - t + 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 41.11. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen mit

$$f_{11}(t) f_{22}(t) - f_{21}(t) f_{12}(t) \neq 0$$

für alle $t \in I$. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{f_{11}' f_{22} - f_{12}' f_{21}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} & \frac{-f_{11}' f_{12} + f_{12}' f_{11}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} \\ \frac{f_{21}' f_{22} - f_{22}' f_{21}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} & \frac{-f_{12} f_{21}' + f_{22}' f_{11}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass sowohl $\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$ Lösungen des Differentialgleichungssystems sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 41.12. (6 Punkte)

a) Schreibe ein Computerprogramm, das zu dem Vektorfeld aus Beispiel 41.5 zu einem Startzeitpunkt t_0, einem Startpunkt $P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und einer vorgegebenen Schrittweite $s > 0$ die approximierenden Punkte P_n berechnet.

b) Berechne mit diesem Programm die Punkte P_n für

(1) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{10}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10$.

(2) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{100}$, $n = 100$.

(3) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(4) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1,001 \\ 0,999 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(5) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1,01 \\ 0,99 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(6) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,9 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(7) $t_0 = -3$, $P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{10}$, $n = 100$.

(8) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(Abzugeben ist lediglich Teil b), und zwar in einer leserfreundlichen Form.)

Aufgabe 41.13. (5 (1+2+2) Punkte)

a) Übersetze das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

b) Bestimme mit dem Polygonzugverfahren zur Schrittweite $s = \frac{1}{2}$ die Näherungspunkte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 für dieses System.

c) Berechne den Wert des zugehörigen Streckenzuges an der Stelle $t = \pi/2$.

Aufgabe 41.14. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -t^2 - 3t + 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 41.15. (8 (2+6) Punkte)

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

a) Erstelle eine Differentialgleichung in einer Variablen, die die Funktion $z(t) = x^2(t) + y^2(t)$ zu einer Lösung (x, y) erfüllen muss.

b) Finde eine nichttriviale Lösung des Differentialgleichungssystems.

Aufgabe 41.16. (4 Punkte)

Finde eine nichttriviale Lösung (für $t > 1$) zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{4t^4-1}{t^5-t} & \frac{-3t}{t^4-1} \\ \frac{-t}{t^4-1} & \frac{3t^4-2}{t^5-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Aufgabe 41.11.

Die für $t \in \mathbb{R}$, $-1 < t < 1$, und ein $n \in \mathbb{N}$ definierte lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2} y' + \frac{n(n+1)}{1-t^2} y = 0$$

heißt *Legendresche Differentialgleichung* zum Parameter n.

Aufgabe 41.17. (5 Punkte)

Zeige, dass das n-te *Legendre-Polynom*[1]

$$\frac{1}{2^n (n!)} ((t^2 - 1)^n)^{(n)}$$

eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter n ist.

[1]Hier bedeutet das hochgestellte (n) die n-te Ableitung.