Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 39

Übungsaufgaben

Aufgabe 39.1. Zeige, dass das Integral zu einer stetigen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V unabhängig von der gewählten Basis ist.

Aufgabe 39.2. Formuliere und beweise den *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für stetige Kurven

$$g\colon I \longrightarrow V,$$

wobei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum sei.

Aufgabe 39.3. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t\,).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über $[a, b]$, und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

Aufgabe 39.4. Sei

$$\gamma\colon [2, 7] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto \left(t^2 - 1, t + 3\right),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = \left(y^2 - x, -3xy - y^3\right).$$

Aufgabe 39.5. Sei

$$\gamma\colon [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto \left(t^2, t^3, t\right),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \left(y^2 - xz^2, xy, -3xz - y^3 z\right).$$

Aufgabe 39.6.*

Berechne das Wegintegral $\int_\gamma F$ zum Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x, y) \longmapsto (y, x),$$

längs des Weges

$$\gamma\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (t, e^t).$$

Aufgabe 39.7.*

Sei

$$\gamma\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \left(t^2, -t^2+1, t\right),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \left(y^2 - xz, xyz, 5x^2z - yz\right) .$$

Aufgabe 39.8. Sei

$$\gamma\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (\cos t\, , \sin t\, , t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x,y,z) = (y - z^3, x^2, -xz) .$$

Aufgabe 39.9. Berechne das Wegintegral zur archimedischen Spirale

$$[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t\cos t\, , t\sin t\,),$$

im Vektorfeld

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,\, y) \longmapsto (y,\, -x) .$$

Aufgabe 39.10. Seien $a,b,c,d,r,s \geq 1$ natürliche Zahlen. Wir betrachten die stetig differenzierbare Kurve

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^r, t^s).$$

Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x,y) = (x^a y^b, x^c y^d) .$$

Aufgabe 39.11. Sei

$$\gamma\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (\cos t\, , \sin t\,),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zu den folgenden Vektorfeldern.

a) $F(x,y) = (x,y)$,

b) $F(x,y) = (x,-y)$,

c) $F(x,y) = (y,x)$,

d) $F(x,y) = (y,-x)$.

Aufgabe 39.12. Es sei

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein stetig differenzierbarer Weg. Es sei G eine Stammfunktion zu F. Zeige

$$\int_\gamma F \;=\; G(\gamma(b)) - G(\gamma(a)).$$

Aufgabe 39.13. Wir betrachten das identische Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ P \longmapsto P.$$

Zeige, dass für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ und für jeden stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$ das Wegintegral $\int_\gamma F$ gleich $\frac{1}{2}(|| Q ||^2 - || P ||^2)$ ist.

Aufgabe 39.14. Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem euklidischen Vektorraum,

$$F, G\colon U \longrightarrow V$$

stetige Vektorfelder und

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$$

eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Für $r, s \in \mathbb{R}$ ist
$$\int_\gamma rF + sG = r\int_\gamma F + s\int_\gamma G.$$
(2) Es ist
$$\int_{-\gamma} F = -\int_\gamma F,$$
wobei $-\gamma$ den umgekehrt durchlaufenen Weg bezeichnet.
(3) Wenn
$$\delta\colon [b,c] \longrightarrow U$$
ein weiterer (stückweise) stetig differenzierbarer Weg ist, so ist
$$\int_{\gamma * \delta} F = \int_\gamma F + \int_\delta F,$$
wobei $\gamma * \delta$ den aneinander gelegten Weg bezeichnet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 39.15. (3 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über $[a,b]$, und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

Aufgabe 39.16. (5 Punkte)

Sei

$$\gamma\colon [-2,5] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \left(t^2, -t^3, t^2 - t + 4\right),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \left(y^3 - x^2 z^2, x^2 y, 5x^3 z - y^2 z\right) .$$

Aufgabe 39.17. (5 Punkte)

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t, -t, t^2),$$

und das Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (x^2, xz, y^2).$$

a) Berechne das Wegintegral $\int_\gamma F$.

b) Es sei

$$g\colon [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0,1],\ s \longmapsto \sin s\,,$$

und $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$. Berechne (unabhängig von a)) $\int_{\tilde{\gamma}} F$

Aufgabe 39.18. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(x^2 - e^y, xy + \cos x\right) .$$

Bestimme das Wegintegral längs des gegen den Uhrzeigersinn einmal durchlaufenen Einheitsquadrates.

Aufgabe 39.19. (6 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{x^3 - xy + 2y^2}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right) .$$

Bestimme das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs des linearen Weges von $(0,-2)$ nach $(3,4)$.

Aufgabe 39.20. (5 Punkte)

Wir betrachten das konstante Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ P \longmapsto v.$$

Zeige, dass für zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ und jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$ das Wegintegral $\int_\gamma F$ gleich $\langle Q - P, v\rangle$ ist.