

Analysis II**Arbeitsblatt 35****Übungsaufgaben**

AUFGABE 35.1. Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge in einem metrischen Raum M . Zeige

$$\bar{T} = \bigcap_{T \subseteq A \subseteq M, A \text{ abgeschlossen}} A.$$

AUFGABE 35.2. Bestimme den Abschluss von \mathbb{Q} in \mathbb{R}

AUFGABE 35.3. Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührungspunkt von T . Es sei

$$f: T \longrightarrow V$$

eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum V mit den Komponentenfunktionen

$$f_1, \dots, f_n: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezüglich einer Basis von V . Zeige, dass der Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \rightarrow a} f_j(x)$$

existieren.

AUFGABE 35.4. Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührungspunkt von T . Es seien $f: T \rightarrow \mathbb{K}$ und $g: T \rightarrow \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existieren. Zeige, dass die folgenden Beziehungen gelten.

(1) Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

(2) Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

- (3) Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

AUFGABE 35.5. Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes, $a \in M$ ein Berührungspunkt von T ,

$$g: T \longrightarrow L$$

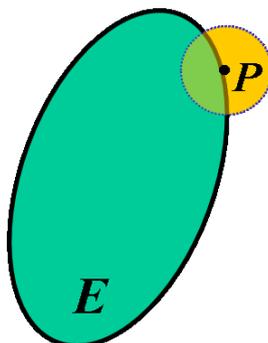
eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum und $b \in L$. Zeige, dass für den Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

genau dann gilt, wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} \|g(x) - b\| = 0$$

gilt.



Die nächsten Aufgaben verwenden den folgenden Begriff.

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Randpunkt* von T , wenn für jedes $\epsilon > 0$ der offene Ball

$$U(x, \epsilon)$$

sowohl Punkte aus T als auch Punkte aus $M \setminus T$ enthält.

Die Menge aller Randpunkte von T heißt *Rand* von T , geschrieben $\text{Rand}(T)$.

AUFGABE 35.6. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T gleich dem Durchschnitt von \overline{T} und $\overline{M \setminus T}$ ist.

AUFGABE 35.7. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T abgeschlossen ist.

AUFGABE 35.8. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \cup \text{Rand}(T)$$

abgeschlossen ist.

AUFGABE 35.9. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \setminus \text{Rand}(T)$$

offen ist.

AUFGABE 35.10. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann abgeschlossen ist, wenn die Inklusion $\text{Rand}(T) \subseteq T$ gilt.

AUFGABE 35.11. Es sei I ein nichtleeres reelles Intervall und $x \in I$ ein Punkt. Bestimme die Teilmengen von $I \setminus \{x\}$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

AUFGABE 35.12.*

Beweise den Zwischenwertsatz mit Satz 35.9 und Satz 35.10.

AUFGABE 35.13. Zeige, dass der \mathbb{R}^n wegzusammenhängend ist.

AUFGABE 35.14. Sei T eine offene (oder abgeschlossene) Kugel im \mathbb{R}^n . Zeige, dass T wegzusammenhängend ist.

AUFGABE 35.15. Sei $n \geq 2$ und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ wegzusammenhängend ist.

AUFGABE 35.16. Zeige, dass ein reelles Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ wegzusammenhängend.

AUFGABE 35.17. Untersuche den Graph der durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegebenen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Zusammenhangseigenschaften.

AUFGABE 35.18. Zeige, dass in \mathbb{R} der nichtleere Durchschnitt von zusammenhängenden Teilmengen wieder zusammenhängend ist. Muss dies auch für den nichtleeren Durchschnitt von zusammenhängenden Teilmengen im \mathbb{R}^2 gelten?

AUFGABE 35.19. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $M = A \cup B$ mit nichtleeren Teilmengen $A, B \subseteq M$ und $A \cap B = \emptyset$. Es gebe ein $\delta > 0$ mit

$$d(x, y) \geq \delta \text{ für alle } x \in A, y \in B.$$

Zeige, dass A (und auch B) sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 35.20. (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T genau dann leer ist, wenn T sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

AUFGABE 35.21. (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Es sei T zusammenhängend. Zeige, dass auch der Abschluss \bar{T} zusammenhängend ist.

AUFGABE 35.22. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine offene, nicht zusammenhängende Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass der Abschluss von U zusammenhängend ist.

AUFGABE 35.23. (5 Punkte)

Bestimme den Abschluss der Menge $T = U(0, 1) \cap \mathbb{Q}^2$ in \mathbb{R}^2 .

AUFGABE 35.24. (4 Punkte)

Es seien $a, b, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

der Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (a, b)$ und dem Radius r . Es sei G eine Gerade in \mathbb{R}^2 mit der Eigenschaft, dass es auf G mindestens einen Punkt P gibt mit $d(M, P) \leq r$. Zeige, dass $K \cap G \neq \emptyset$ ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Neighborhood edge.png , Autor = Benutzer Zasdfigbnm auf Commons, Lizenz = gemeinfrei

2