Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück WS 2014/2015

Analysis I

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Zeige, und zwar allein unter Bezug auf Rechengesetze in $\mathbb{Z}$, dass die durch

(1)
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd}$$

(2)
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad+bc}{cd}$$

definierte Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen wohldefiniert ist, und dass die Assoziativität, die Kommutativität und das Distributivgesetz gelten.

Aufgabe 3.2. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1) $\frac{x}{1} = x$, (2) $\frac{1}{-1} = -1$,

(3) $\frac{0}{z} = 0$, (4) $\frac{z}{z} = 1$,

(5) $\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}$, (6) $\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}$,

(7) $\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw+yz}{zw}$.

Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man Addition mit Multiplikation (und Subtraktion mit Division) vertauscht, also

$$(x-z) \cdot (y-w) = (x+w) \cdot (y+z) - (z+w)\,?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x+y}{z+w}$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also

$$a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c)\,,$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.4. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

Aufgabe 3.5. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0 = 1$ ist.

Aufgabe 3.6. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass

$$(n+1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n+m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften dann ebenfalls gelten.

Aufgabe 3.7. Skizziere den Graphen der reellen Addition

$$+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und den Graphen der reellen Multiplikation

$$\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

Aufgabe 3.8.*

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

Aufgabe 3.9. Man gebe die Antworten als Bruch (bezogen auf das angegebene Vergleichsmaß): Um wie viel ist eine drei Viertel Stunde länger als eine halbe Stunde, und um wie viel ist eine halbe Stunde kürzer als eine drei Viertel Stunde?

Aufgabe 3.10. Man erläutere die Uhrzeitangaben „halb fünf“, „viertel fünf“, „drei viertel fünf“. Was würde „ein sechstel fünf“ und „drei siebtel fünf“ bedeuten?

Aufgabe 3.11.*

Heinz-Peter schaut am Morgen in den Spiegel und entdeckt fünf Pickel auf seiner Stirn. Diese müssen alle ausgedrückt werden, wobei zwei Pickel so nah beieinander liegen, dass sie unmittelbar hintereinander behandelt werden müssen. Wie viele Reihenfolgen gibt es, die Pickel auszudrücken?

Aufgabe 3.12.*

Vor einem Fußballspiel begrüßt jeder der elf Spieler einer Mannschaft jeden Spieler der anderen Mannschaft, jeder Spieler begrüßt die vier Unparteiischen und diese begrüßen sich alle untereinander. Wie viele Begrüßungen finden statt?

Aufgabe 3.13. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

Aufgabe 3.14. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 3.15.*

Es sei M eine n-elementige Menge. Zeige, dass die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}$$

ist.

Aufgabe 3.16. Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 3.17. Es sei K ein Körper mit

$$2 \neq 0.$$

Zeige, dass für $f, g \in K$ die Beziehung

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

gilt.

Aufgabe 3.18.*

Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.19. (2 Punkte)

Zeige für einen Körper K die folgenden Eigenschaften.

(1) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung

$$\alpha_a \colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv.

(2) Für jedes $b \in K$, $b \neq 0$, ist die Abbildung

$$\mu_b \colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

Aufgabe 3.20. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d, b+d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d, b+d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

Aufgabe 3.21. (4 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 3.22. (4 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0, 0) \text{ und } 1 = (1, 0)\,,$$

der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)\,.$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.

Aufgabe 3.23. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}\,.$$