

Analysis I**Arbeitsblatt 28****Übungsaufgaben**

AUFGABE 28.1.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 2 \text{ mit } y(5) = 3.$$

AUFGABE 28.2.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 3t + 4 \text{ mit } y(-1) = -5.$$

AUFGABE 28.3. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \sin t \text{ mit } y(\pi) = 7.$$

AUFGABE 28.4. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^3 - 2t + 5 \text{ mit } y(3) = 4.$$

AUFGABE 28.5. Man mache sich anschaulich und mathematisch klar, dass bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung der Abstand zwischen zwei Lösungen y_1 und y_2 zeitunabhängig ist, d.h. dass $y_1(t) - y_2(t)$ konstant ist.

Man gebe ein Beispiel, dass dies bei zeitunabhängigen Differentialgleichungen nicht der Fall sein muss.

AUFGABE 28.6. Untersuche die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die sowohl zeit- als auch ortsunabhängig sind.

AUFGABE 28.7. Wie sieht der Graph einer Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus, die nur von einer Variablen abhängt.

AUFGABE 28.8. Finde alle Lösungen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = y.$$

Die folgende Aufgabe setzt Aufgabe 19.12 voraus.

AUFGABE 28.9. Es sei

$$D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Dimension der Eigenräume der Ableitung

$$D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \longmapsto f'.$$

AUFGABE 28.10. Finde die Lösungen für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = cy^{\frac{2}{3}}$$

mit $c \in \mathbb{R}_+$.

Finde eine inhaltliche Interpretation zu dieser Differentialgleichung analog zu Beispiel 28.10.

AUFGABE 28.11. Zeige, dass $y(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}_+$) eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = ny^{\frac{n-1}{n}}$$

auf \mathbb{R}_+ ist.

AUFGABE 28.12. Finde eine differenzierbare Funktion $y(t)$ (nicht die Nullfunktion), die die Bedingung

$$y'(t) = y(t-1)$$

erfüllt (dabei ist $y(t-1)$ als der Wert der Funktion y an der Stelle $t-1$ zu verstehen, nicht als das Produkt der Funktionsvariablen y mit $t-1$; es handelt sich also *nicht* um eine Differentialgleichung).

AUFGABE 28.13. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = y \text{ mit } y(0) = 3 \text{ und } y'(0) = -2.$$

AUFGABE 28.14. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -y.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 5 \text{ und } y'(0) = 6.$$

AUFGABE 28.15. Zeige, dass die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = 0$$

einen n -dimensionalen reellen Vektorraum bilden.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 28.16. (3 Punkte)

Finde eine Lösung zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = t + y.$$

AUFGABE 28.17. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t^3}{t^2 + 1} \text{ mit } y(1) = 2.$$

AUFGABE 28.18. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{1}{\sinh t}$$

auf \mathbb{R}_+ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 7$.

AUFGABE 28.19. (4 Punkte)

Finde alle polynomialen Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = 9y - 3ty' + y''.$$

AUFGABE 28.20. (5 Punkte)

Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ unendlich oft differenzierbare Funktionen

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto f(z),$$

derart gibt, dass die n -te Ableitung $f^{(n)}$ mit f übereinstimmt, die Ableitungen $f^{(i)}$, $i < n$, aber nicht.

AUFGABE 28.21. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit $f(0) = 1$ und mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die von 2^x verschieden ist.