

Analysis I**Arbeitsblatt 24****Übungsaufgaben**

AUFGABE 24.1. Berechne das bestimmte Integral $\int_0^8 f(t) dt$, wobei die Funktion f durch

$$f(t) = \begin{cases} t + 1, & \text{falls } 0 \leq t \leq 2, \\ t^2 - 6t + 11, & \text{falls } 2 < t \leq 5, \\ 6, & \text{falls } 5 < t \leq 6, \\ -2t + 18, & \text{falls } 6 < t \leq 8, \end{cases}$$

gegeben ist.

AUFGABE 24.2.*

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

AUFGABE 24.3. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_2^5 \frac{x^2 + 3x - 6}{x - 1} dx.$$

AUFGABE 24.4.*

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

AUFGABE 24.5.*

Bestimme den Durchschnittswert der Quadratwurzel \sqrt{x} für $x \in [1, 4]$. Vergleiche diesen Wert mit der Wurzel des arithmetischen Mittels von 1 und 4 und mit dem arithmetischen Mittel der Wurzel von 1 und der Wurzel von 4.

AUFGABE 24.6.*

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6, 22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f: [6, 22] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

AUFGABE 24.7.*

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \ln 2$$

gilt. Tipp: Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $]0, 1]$.

AUFGABE 24.8. Bestimme die zweite Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 - t^3 + 2t} dt.$$

AUFGABE 24.9. Es sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt$$

differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitung.

AUFGABE 24.10. Es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die durch

$$a_n := \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t) dt$$

definierte Folge. Entscheide, ob diese Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 24.11. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f(x) dx$$

absolut konvergent ist.

AUFGABE 24.12. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a, b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Man zeige: Ist f stetig in einem Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) > 0$, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

AUFGABE 24.13. Man zeige, dass die Gleichung

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 1$$

eine einzige Lösung $x \in [0, 1]$ besitzt.

AUFGABE 24.14. Seien

$$f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Beweise, dass es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

AUFGABE 24.15. Es seien

$$f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen und es sei $g(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Zeige, dass es dann ein $s \in [a, b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(s) \int_a^b g(t) dt.$$

AUFGABE 24.16. Bestimme den Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Sinusfunktion zwischen 0 und π .

AUFGABE 24.17.*

Sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 24.18. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^7 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x + 1} dx.$$

AUFGABE 24.19. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}.$$

AUFGABE 24.20. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

eingeschlossen wird.

AUFGABE 24.21. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} & \text{für } t \neq 0. \end{cases}$$

Zeige, unter Bezug auf die Funktion $g(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, dass f eine Stammfunktion besitzt.

AUFGABE 24.22. (5 Punkte)

Betrachte die durch

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^n \sqrt{i}$$

gegebene Folge. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(Verwende Eigenschaften der Wurzelfunktion.)

AUFGABE 24.23. (6 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft, dass das Treppenintegral zur maximalen unteren Treppenfunktion zur äquidistanten Unterteilung in n Teilintervalle größer ist als dasjenige zu $n + 1$ Teilintervallen (d.h. mehr Teilungspunkte führen zu einer schlechteren Approximation).

(Ignoriere zuerst die beiden Bedingungen stetig und streng.)