Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 22

Aufgabe 22.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto (\sin z)(\cos z),$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 22.2. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 22.3. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ im Punkt $a = 3$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 3 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 22.4.*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 22.5.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

im Entwicklungspunkt $a = 1$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 22.6.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 22.7.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 22.8.*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 2 der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z},$$

im Entwicklungspunkt i.

Aufgabe 22.9. Bestimme die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für einen beliebigen Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 22.10. Bestimme das Polynom

$$f(z) \;=\; z^3 + 3z^2 - 7z - 4.$$

in der neuen Variablen $z - 2$ (also das umentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) direkt durch Einsetzen,

b) über das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt 2.

Aufgabe 22.11. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ eine konvergente Potenzreihe. Bestimme die Ableitungen $f^{(k)}(a)$.

Aufgabe 22.12. Es sei $p \in \mathbb{R}[Y]$ ein Polynom und

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) = q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

AUFGABE 22.13. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x\in\mathbb{R}_+,\, x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

besitzt.

AUFGABE 22.14. Bestimme den Wendepunkt der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto e^{-\frac{1}{x}}.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 22.15. (4 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $j \in \mathbb{Z}$. Zeige

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi ijk}{n}} = \begin{cases} n, & \text{falls } j \text{ ein Vielfaches von } n \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

AUFGABE 22.16. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome bis zum Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin\,(\,\cos\, z\,) + z^3 \exp\left(z^2\right).$$

AUFGABE 22.17. (4 Punkte)

Bestimme das Polynom

$$f(z)\ =\ z^3 + (4-i)z^2 - 2iz + 5.$$

in der neuen Variablen $z - 1 - i$ (also das umentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) direkt durch Einsetzen,

b) über das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt $1 + i$.

AUFGABE 22.18. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f\colon\ [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = (\,\sin\, x\,)\,(\,\cos\, x\,)\,,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

AUFGABE 22.19. (6 Punkte)

Sei ϵ, $0 < \epsilon \leq \frac{1}{3}$, vorgegeben. Zeige, dass es eine unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq 0 \,, \\ 1 \text{ für } x \geq \epsilon \text{ und } x \leq 1 - \epsilon \,, \\ 0 \text{ für } x \geq 1 \,. \end{cases}$$