Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 20

Übungsaufgaben

Gar nicht mehr lange! Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

Aufgabe 20.1. Es seien
$$f,g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
konvexe Funktionen. Zeige, dass die Summe $f+g$ ebenfalls konvex ist.

Aufgabe 20.2. Es sei
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn $-f$ konkav ist.

Aufgabe 20.3. Es seien
$$f,g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
konvexe Funktionen. Zeige durch Beispiele, dass die Differenz $f-g$ konvex oder konkav sein kann, aber weder konvex noch konkav sein muss.

Aufgabe 20.4. Es seien
$$f,g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
konvexe Funktionen. Zeige durch Beispiele, dass das Produkt fg konvex oder konkav sein kann, aber weder konvex noch konkav sein muss.

Aufgabe 20.5. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn für jedes Punktepaar $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit $a, b \in I$ die Verbindungsstrecke oberhalb des Graphen von f verläuft.

(Bemerkung: Eine konvexe Funktion auf einem offenen Intervall ist übrigens immer stetig.)

Aufgabe 20.6. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal differenzierbare Funktion. Zeige, dass f genau dann eine konvexe Funktion ist, wenn für die zweite Ableitung $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Aufgabe 20.7. Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit ungeradem Grad ≥ 3. Zeige, dass f weder konvex noch konkav sein kann.

Aufgabe 20.8. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeige, dass der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ebenfalls R ist.

Aufgabe 20.9. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto z^2 \cdot \exp\left(z^3 - 4z\right).$$

Aufgabe 20.10.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = xe^x.$$

Zeige durch Induktion, dass die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gleich

$$f^{(n)}(x) \,=\, (x+n)\, e^x$$

ist.

Aufgabe 20.11. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe 20.12. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgabe 20.13. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften

$$f' = f \text{ und } f(0) = 1\,.$$

Zeige, dass $f(x) = \exp x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 20.14. Berechne bis auf drei Nachkommastellen den Wert von e^i.

Aufgabe 20.15. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 20.9.

Aufgabe 20.16. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 15.10 (4).

Aufgabe 20.17. Bestimme die 1034871-te Ableitung der Sinusfunktion.

Aufgabe 20.18.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x)\,.$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

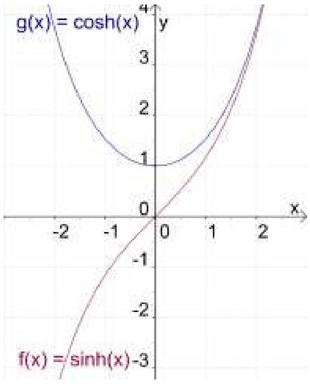
b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Aufgabe 20.19. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto (\sin z)(\cos z).$$

Aufgabe 20.20. Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto (\sin z)^n.$$



Der Verlauf der Hyperbelfunktionen im Reellen.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch
$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$
definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.
Die für $z \in \mathbb{C}$ durch
$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$
definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.

AUFGABE 20.21. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus (dabei ist $z \in \mathbb{C}$.)

(1)
$$\cosh z + \sinh z = e^z .$$
(2)
$$\cosh z - \sinh z = e^{-z} .$$
(3)
$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1 .$$
(4)
$$\cosh iz = \cos z \text{ und } \sinh iz = i \cdot \sin z .$$

AUFGABE 20.22. Bestimme die Ableitungen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

AUFGABE 20.23. Zeige, dass der Sinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}$ streng wachsend ist.

AUFGABE 20.24. Zeige, dass der Kosinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$ streng fallend und auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng wachsend ist.

Aufgrund dieser beiden Aufgaben gibt es Umkehrfunktionen, die man *Sinus area hyperbolicus* bzw. *Kosinus area hyperbolicus* nennt.

Aufgabe 20.25.*

Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, die Gleichheit

$$\operatorname{arcosh} x \;=\; \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

gilt.

Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie

Aufgabe 20.26. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

$$1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ 312211,\ ...$$

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschulkinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.27. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine konvexe Funktion, seien $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Zeige die Jensensche Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \;\leq\; \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Aufgabe 20.28. (3 Punkte)

Bestimme das Konvexitätsverhalten und die Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x + 5\,.$$

Aufgabe 20.29. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine ungerade Funktion, die nicht linear sei. Zeige, dass f weder konvex noch konkav sein kann.

Aufgabe 20.30. (1 Punkt)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin\left(\cos z\right).$$

Aufgabe 20.31. (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^x.$$

Aufgabe 20.32. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 20.26 entspricht.

(1) Ist f wachsend?
(2) Ist f surjektiv?
(3) Ist f injektiv?
(4) Besitzt f einen Fixpunkt?

Die Weihnachtsaufgabe

Aufgabe 20.33. (10 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 20.26 entspricht. Unter einem *Zykel* von f der Länge n verstehen wir ein $x \in \mathbb{N}$ derart, dass $f^n(x) = x$ (f^n bezeichnet die n-te Hintereinanderschaltung von f mit sich selbst) und $f^i(x) \neq x$ ist für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Besitzt f Zykel der Länge $n \geq 2$?

(Diese Aufgabe ist gesondert abzugeben, die Deckelregel findet für sie keine Anwendung.)