

**Analysis I****Arbeitsblatt 19****Übungsaufgaben****AUFGABE 19.1.\***

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer vierten Potenz, vermindert um das Doppelte ihrer dritten Potenz, gleich dem Negativen der Quadratwurzel von 42 ist?

**AUFGABE 19.2.** Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

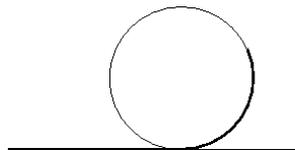
die durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, & \text{falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade,} \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, & \text{falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade,} \end{cases}$$

definiert ist. Untersuche  $f$  in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

**AUFGABE 19.3.** Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f: [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

**AUFGABE 19.4.** Die Funktion

$$f: \mathbb{R}_{<1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sei für negatives  $x$  konstant gleich 0 und folge für  $x \in [0, 1[$  dem unteren rechten Viertelkreis mit Mittelpunkt  $(0, 1)$  und Radius 1. Bestimme den Grad der Differenzierbarkeit dieser Funktion.

**AUFGABE 19.5.** Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Finde die Punkte  $a \in [-3, 3]$  derart, dass die Steigung der Funktion in  $a$  gleich der Gesamtsteigung zwischen  $-3$  und  $3$  ist.

## AUFGABE 19.6.\*

Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei  $a \in \mathbb{R}$ . Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ f\"ur alle } x \geq a.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ f\"ur alle } x \geq a \text{ gilt.}$$

AUFGABE 19.7. Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad  $d \geq 1$  maximal  $d - 1$  lokale Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal  $d$  Intervalle unterteilen lassen, auf denen abwechselnd  $f$  streng wachsend oder streng fallend ist.

AUFGABE 19.8. F\"uhre die Details im Beweis zu Satz 19.7 aus.

## AUFGABE 19.9.\*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

## AUFGABE 19.10.\*

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

- Zeige, dass  $f$  eine stetige Bijektion zwischen  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}$  definiert.
- Bestimme das Urbild  $u$  von 0 unter  $f$  sowie  $f'(u)$  und  $(f^{-1})'(0)$ . Fertige eine grobe Skizze f\"ur die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  an.

## AUFGABE 19.11.\*

Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = (2x + 3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von  $f$ . Fertige eine grobe Skizze f\"ur den Funktionsverlauf an.

## AUFGABE 19.12.\*

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

- a) Zeige, dass die Funktion  $f$  im reellen Intervall  $[0, 1]$  genau eine Nullstelle besitzt.
- b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.
- c) Man gebe eine rationale Zahl  $q \in [0, 1]$  derart an, dass  $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$  ist.

AUFGABE 19.13. Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und es sei

$$D(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Zeige, dass  $D(I, \mathbb{R})$  ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung

$$D(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Abb}(I, \mathbb{R}), f \longmapsto f',$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme den Kern dieser Abbildung und seine Dimension.

AUFGABE 19.14. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

mittels Polynomdivision (vergleiche Beispiel 19.19).

AUFGABE 19.15. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^2 + x}$$

im Punkt  $-1$ .

AUFGABE 19.16.\*

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt 1, und zwar

- a) mittels Polynomdivision,  
 b) mittels der Regel von l'Hospital.

AUFGABE 19.17. Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \frac{2x - 3}{5x^2 - 3x + 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 19.18. (3 Punkte)

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f: [-4, 4] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 3.$$

AUFGABE 19.19. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

AUFGABE 19.20. (4 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion vom Grad  $d \geq 1$ . Es sei  $m$  die Anzahl der lokalen Maxima von  $f$  und  $n$  die Anzahl der lokalen Minima von  $f$ . Zeige, dass bei  $d$  ungerade  $m = n$  und bei  $d$  gerade  $|m - n| = 1$  ist.

AUFGABE 19.21. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, c \neq 0$ ), keine lokalen Extrema besitzt.

AUFGABE 19.22. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 5}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$$

im Punkt 1.