Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 18

Übungsaufgaben

Die folgende Aufgabe löse man direkt ohne Ableitungsregeln.

Aufgabe 18.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 18.2. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 18.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 18.4. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^q,$$

für jedes $q \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 18.5.*

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 18.6.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

Bestimme die Tangenten an f, die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

Aufgabe 18.7. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 18.8.*

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen unter Verwendung der Regel

$$\left(f^2\right)' = 2f \cdot f'$$

mit Hilfe von

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right).$$

Aufgabe 18.9. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon\, \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}.$$

Aufgabe 18.10. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

Aufgabe 18.11. Es sei $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ und $g(y) = y^2 - y + 2$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 18.12. Es sei $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$ und $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 18.13. Zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ genau dann einen Grad $\leq d$ besitzt (oder $P = 0$ ist), wenn die $(d+1)$-te Ableitung von P das Nullpolynom ist.

Aufgabe 18.14.*

Es seien

$$f, g\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x))\,.$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2\,.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Aufgabe 18.15.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Zeige durch Induktion, dass für die n-fache Hintereinanderschaltung $(n \geq 1)$

$$f^{\circ n} = f \circ f \circ \cdots \circ f \ \ (n \text{ mal})$$

die Beziehung

$$(f^{\circ n})' \ = \ f' \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(f' \circ f^{\circ i} \right)$$

gilt.

Aufgabe 18.16. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x\,|x|\,,$$

differenzierbar ist, aber nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 18.17. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Zeige, dass

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

gilt.

Aufgabe 18.18. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt 0. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = z^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d - 2$.

Aufgabe 18.19.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$ ein Punkt und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt w. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = (z - w)^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d - 2$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.20. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^3-x+2},$$

wobei D die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

Aufgabe 18.21. (4 Punkte)

Bestimme, ob die komplexe Konjugation

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \overline{z},$$

differenzierbar ist oder nicht.

Aufgabe 18.22. (3 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und seien

$$f_i\colon D \longrightarrow \mathbb{K},\, i = 1, \ldots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n\,.$$

Aufgabe 18.23. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass P genau dann ein Vielfaches von $(X-a)^n$ ist, wenn a eine Nullstelle sämtlicher Ableitungen $P, P', P'', \ldots, P^{(n-1)}$ ist.

Aufgabe 18.24. (4 Punkte)

Es sei

$$F\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine rationale Funktion. Zeige, dass F genau dann ein Polynom ist, wenn es eine (höhere) Ableitung mit $F^{(n)} = 0$ gibt.