

**Analysis I****Arbeitsblatt 13****Übungsaufgaben**

## AUFGABE 13.1.\*

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

## AUFGABE 13.2. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass  $f$  konstant ist.

## AUFGABE 13.3. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die genau zwei Werte annimmt.

## AUFGABE 13.4. Finde für die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1,$$

eine Nullstelle im Intervall  $[0, 1]$  mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal  $1/100$ .

## AUFGABE 13.5.\*

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall  $[0, 1]$ , mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge  $1/8$ , in dem eine Nullstelle von  $f$  liegen muss.

AUFGABE 13.6. Zeige, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht stetig ist, aber dem Zwischenwertsatz genügt.

AUFGABE 13.7. Es sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine bijektive stetige Funktion auf einem reellen Intervall  $I$ . Zeige, dass  $f$  streng wachsend oder streng fallend ist.

AUFGABE 13.8. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt{\frac{7n^2 - 4}{3n^2 - 5n + 2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

AUFGABE 13.9. Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei rekursiv durch  $x_0 = 1$  und

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$

definiert. Zeige, dass diese Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.

AUFGABE 13.10. Bestimme direkt, für welche  $n \in \mathbb{N}$  die Potenzfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^n,$$

ein Extremum im Nullpunkt besitzen.

AUFGABE 13.11. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass das Bild eines abgeschlossenen Intervalls nicht abgeschlossen sein muss.

AUFGABE 13.12. Man gebe ein Beispiel eines beschränkten Intervalls  $I \subseteq \mathbb{R}$  und einer stetigen Funktion

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von  $f$  beschränkt ist, die Funktion aber kein Maximum annimmt.

AUFGABE 13.13. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass das Bild eines offenen Intervalls nicht offen sein muss.

AUFGABE 13.14. Es sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Die Funktion habe in den Punkten  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$ , lokale Maxima. Zeige, dass die Funktion zwischen  $x_1$  und  $x_2$  mindestens ein lokales Minimum besitzt.

AUFGABE 13.15. Es sei

$$f: [0, 1] \longrightarrow [0, 1[$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass  $f$  nicht surjektiv ist.

AUFGABE 13.16. Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

stetige Funktionen. Es sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $(fg)(a) = 0$  und mit  $f(a) \neq 0$ . Zeige, dass es ein  $\delta > 0$  gibt derart, dass die Einschränkung  $g|_{[a-\delta, a+\delta]}$  die Nullfunktion ist.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des Fixpunktes.

Es sei  $M$  eine Menge und

$$f: M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element  $x \in M$  mit  $f(x) = x$  heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

AUFGABE 13.17. Bestimme die Fixpunkte der Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2.$$

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 13.18. (2 Punkte)

Bestimme das Minimum der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 + 3x - 5.$$

(Achtung: Ableitungen haben wir noch nicht eingeführt!)

AUFGABE 13.19. (4 Punkte)

Finde für die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

eine Nullstelle im Intervall  $[0, 1]$  mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal  $1/200$ .

AUFGABE 13.20. (4 Punkte)

Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

AUFGABE 13.21. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt[3]{\frac{27n^3 + 13n^2 + n}{8n^3 - 7n + 10}}, n \in \mathbb{N}.$$

AUFGABE 13.22. (4 Punkte)

Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls  $[a, b]$  in sich. Zeige, dass  $f$  einen Fixpunkt besitzt.

AUFGABE 13.23. (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen wachsenden Funktionen

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ , mit  $f(\mathbb{R}_{\leq 0}) = 0$  und  $f(\mathbb{R}_{\geq 1}) = 1$  überabzählbar ist.