Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 11

Übungsaufgaben

AUFGABE 11.1. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3+7i)X^2 + (2+2i)X - 1 + 6i)\,.$$

AUFGABE 11.2. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass die Multipliktion auf $K[X]$ assoziativ, kommutativ und distributiv ist und dass das (konstante) Polynom 1 neutrales Element der Multiplikation ist.

AUFGABE 11.3. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

AUFGABE 11.4. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi\colon K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
(3) $1(a) = 1$.

AUFGABE 11.5. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

AUFGABE 11.6. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$,
(2) $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.

AUFGABE 11.7. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

Aufgabe 11.8.*

Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P = X^3 - 2iX^2 + 4X - 1 \text{ und } Q = iX - 3 + 2i$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

Aufgabe 11.9.*

Es seien

$$f, g, h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f \;=\; (h \circ f) \cdot (g \circ f)\,.$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f \;=\; (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

Aufgabe 11.10. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

Aufgabe 11.11. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 11.12. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

Aufgabe 11.13.*

Bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

Aufgabe 11.14. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 11.15. Es sei K ein Körper und seien $S, Q \in K[X]$ zwei Polynome mit $\operatorname{grad}(Q) \geq 1$. Zeige, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine eindeutige Darstellung

$$S = R_0 + R_1 Q + R_2 Q^2 + \cdots + R_n Q^n$$

mit Polynomen R_j vom Grad $< \operatorname{grad}(Q)$ gibt.

Aufgabe 11.16. Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Zeige, dass es ein eindeutiges Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ gibt derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.

Aufgabe 11.17. Zeige, dass es zu ganzen Zahlen a, n mit $a > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Aufgabe 11.18. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K. Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X],\, Q \neq 0 \right\} ,$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe 11.19. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

Aufgabe 11.20. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \text{ und } g(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4} .$$

In einer der Aufgaben wird folgender Begriff verwendet.

Eine reelle Zahl z heißt *algebraisch* oder *algebraische Zahl*, wenn es ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$, $P \neq 0$, mit $P(z) = 0$ gibt. Andernfalls heißt sie *transzendent*.

Beispielsweise sind rationale Zahlen und Wurzeln aus rationalen Zahlen algebraisch, dagegen sind e und π transzendent (das sind schwierige Sätze).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.21. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2-i)X^3 + (3-5i)X^2 + (2+i)X + 1 + 5i) .$$

Aufgabe 11.22. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = (5+i)X^4 + iX^2 + (3-2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

Aufgabe 11.23. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X+1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \cdots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

Aufgabe 11.24. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 3, für welches

$$f(0) = -1,\ f(-1) = -3,\ f(1) = 7,\ f(2) = 21\,.$$

gilt

Aufgabe 11.25. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $R = K[X]$ der Polynomring über K. Sei

$$P = \{F \in K[X] |\, \text{Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\}\ .$$

Zeige, dass P die drei folgenden Eigenschaften besitzt

(1) Entweder $F \in P$ oder $-F \in P$ oder $F = 0$.
(2) Aus $F, G \in P$ folgt $F + G \in P$.
(3) Aus $F, G \in P$ folgt $F \cdot G \in P$.

Aufgabe 11.26. (6 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 11.25, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.

Aufgabe 11.27. (3 Punkte)

Zeige, dass die Menge der Polynome in einer Variablen mit rationalen Koeffizienten abzählbar ist.

Aufgabe 11.28. (3 Punkte)

Zeige, dass die Menge der reellen transzendenten Zahlen überabzählbar ist.