Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 1

Aufgabe 1.1. Bestimme für die Mengen

$$M = \{a, b, c, d, e\},\ N = \{a, c, e\},\ P = \{b\},\ R = \{b, d, e, f\}$$

die Mengen

(1) $M \cap N$,
(2) $M \cup R$,
(3) $(N \cup P) \cap R$,
(4) $N \setminus R$,
(5) $(M \cup P) \setminus (R \setminus N)$,
(6) $((P \cup R) \cap N) \cap R$,
(7) $(R \setminus P) \cap (M \setminus N)$.

Aufgabe 1.2. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(2) $A \cup \emptyset = A$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,
(4) $A \cup B = B \cup A$,
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 1.3. Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.

Aufgabe 1.4. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) |\, x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) |\, x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) |\, y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x, y) |\, |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$,
(5) $\{(x, y) |\, 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x, y) |\, xy = 0\}$,
(7) $\{(x, y) |\, xy = 1\}$,
(8) $\{(x, y) |\, xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,

(9) $\{(x, y) | \, 0 = 0\}$,
(10) $\{(x, y) | \, 0 = 1\}$.

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

AUFGABE 1.5. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Eine Kreislinie K.
(2) Ein Geradenstück I.
(3) Eine Gerade G.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

AUFGABE 1.6. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \, ,$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \, ,$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \, .$$

AUFGABE 1.7.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 \; = \; (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} .$$

AUFGABE 1.8. Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

AUFGABE 1.9. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung
$$2^n \, \geq \, n^2$$
gilt.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Zu einer natürlichen Zahl n nennt man die Zahl

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

die *Fakultät* von n (sprich n Fakultät).

Aufgabe 1.10. Zeige, dass für $n \geq 4$ die Beziehung

$$2^n \leq n!$$

gilt.

Aufgabe 1.11. Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$, sei rekursiv durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \text{ für } n \geq 2$$

definiert. Zeige, dass für $n \geq 2$

$$a_n = \frac{1}{2} n!$$

gilt.

Aufgabe 1.12.*

Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} \text{ bei } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Aufgabe 1.13. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

Aufgabe 1.14.*

Die offizielle Berechtigung für eine Klausur werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Der Professor sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.15. (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

Aufgabe 1.16. (4 Punkte)

Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$,
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 1.17. (3 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1)\prod_{i=1}^{m}(2i-1)^2 = \prod_{k=1}^{m}(4k^2-1)\,.$$

Aufgabe 1.18. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$ mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

Aufgabe 1.19. (4 Punkte)

Wie viele Teilquadrate (unterschiedlicher Seitenlänge) besitzt ein Schachbrett? Man finde möglichst viele Strategien, diese Anzahl zu bestimmen.

Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Liebe Freunde der Mathematik

Herzlich willkommen zur Vorlesung „Analysis I“ im Wintersemester 2014/2015. Dieses Blatt enthält die wesentlichen Informationen zu Aufgaben, Übungsbetrieb und Klausur der Veranstaltung. Fragen Sie bitte nach, wenn etwas unklar ist.

Allgemeines

Die Veranstaltung „Analysis I und II“ ist eine Pflichtveranstaltung im Mathematikstudium, die Sie erfolgreich abschließen müssen. Die Mathematik an einer Universität unterscheidet sich in mancherlei Hinsicht von der Schulmathematik; insbesondere erfordert die erfolgreiche Durchdringung des Stoffes nicht nur mathematische Begabung, sondern auch Ausdauer, Organisationsgeschick, Motivation, Fleiß und Frustrationstoleranz, und das von Anfang an.

Der Besuch der Veranstaltungen ist frei und unterliegt keiner Kontrolle. Wegen der hohen Studierendenzahlen bitte ich Sie aber, sich gleichmäßig (unter Beachtung der Raumkapazitäten) auf die Übungsgruppen und Tutorien zu verteilen und auch „unbeliebte Anfangszeiten“ wahrzunehmen.

Die Veranstaltung sollte man als Ganzes betrachten mit allem, was dazu gehört: Vorlesung, Vor- und Nachbereitung der Vorlesung, Übungen und Tutorien mit aktiver Mitarbeit, intensive Bearbeitung der Aufgaben in Einzel- und Gruppenarbeit (Lektüre, Ideensammlung, Diskussion, Ansätze, Versuche, Optimierung, Reinschrift, Abgabe, Lektüre der Korrekturen, Fehlereinsicht), Studieren des Skripts, Netzseite, Literatur, Testklausuren, intensive Stoffwiederholung in der vorlesungsfreien Zeit, Klausur, mündliche Prüfung. Die Einzelteile ergeben für sich genommen wenig Sinn und nur durch eine intensive Beschäftigung mit dem Gesamtangebot kann das Verständnis der Inhalte gelingen, das Voraussetzung für den Studienerfolg ist.

Vorlesung

In der Vorlesung wird der neue Stoff vorgestellt und nur selten wird etwas wiederholt. Umso wichtiger ist es, dass Sie die Vorlesungen regelmäßig nachbereiten. Es gibt ein Skript, das den Inhalt der Vorlesung abdeckt (alle Materialien sind unter https://de.wikiversity.org/ wiki/Kurs:Analysis_(Osnabrueck_2014-2016)/Teil_I erhältlich und stehen unter der CC-by-sa-3.0-Lizenz). Dies ermöglicht Ihnen auch, sich die kommenden Vorlesungen schon im Voraus anzusehen, was dringend empfohlen wird.

Arbeitsblätter und Übungsbetrieb

Zu jeder Vorlesung gibt es ein Arbeitsblatt. Es besteht jeweils aus mehreren Übungen bzw. Aufgaben, die das Verständnis des Vorlesungsinhaltes vertiefen sollen. Es unterteilt sich in „Übungsaufgaben“ (die tendenziell einfacher sind) und „Aufgaben zum Abgeben“. Ich empfehle, den Stoff der Vorlesung anhand der Arbeitsblätter sofort und kontinuierlich nachzuarbeiten.

Die Blätter sind verhältnismäßig umfangreich; der Umfang orientiert sich daran, in welchem Maße Sie sich (im Laufe des Kurses einschließlich der Vorbereitungszeit für die Klausur und die mündliche Prüfung) mit dem Stoff auseinandersetzen müssen, um ein sehr gutes Verständnis zu erzielen. Es wird nicht erwartet, dass Sie die Blätter vollständig in der Ausgabewoche bearbeiten. Bei der Gestaltung der Arbeitsblätter versuche ich grundsätzlich, ein umfangreiches Arbeitsangebot zur Verfügung zu stellen, das unterschiedliche Schwierigkeitsgrade abdeckt. Sie sollten sich dabei auf das für Sie Anspruchsvolle konzentrieren. Dass durch die Übungsaufgaben auch die Teilnahmeberechtigung an der Klausur erworben wird ist wichtig, aber ein Nebenaspekt.

In den Übungen, die von Postdocs und Doktoranden eigenverantwortlich betreut werden, können Sie Fragen zu den Vorlesungen der Woche stellen, es werden Übungsaufgaben besprochen, Präsenzaufgaben bearbeitet, manchmal Tipps zu den abzugebenden Aufgaben gegeben, korrigierte Aufgaben zurückgegeben und teilweise vorgerechnet. In allen Teilen ist die aktive Mitarbeit der Studierenden wichtig und wird erwartet. Ein Besuch einer Übungsgruppe ohne adäquate Vorbereitung ist wenig sinnvoll. Sie können auf dem Forum (auf Wikiversity) Wünsche äußern, was in den Übungen besprochen werden soll.

Es gibt insgesamt drei Übungsgruppen.

Während der Woche bearbeiten Sie die abzugebenden Aufgaben. Dies dient dem vertieften Verständnis des Stoffes und ist die Voraussetzung, um für die Klausur zugelassen zu werden.

In den Tutorien, die von studentischen Tutoren betreut werden, die auch Ihre Aufgaben korrigieren, werden Sie beim Lösen der abzugebenden Aufgaben unterstützt. Der Besuch der Tutorien ist nur dann sinnvoll, wenn Sie schon mitten im Bearbeiten sind, aber hier und da eine Rückmeldung, eine Bestätigung, einen Tipp brauchen könnten. Die Tutorien laufen ohne Programm im offenen Betrieb ab, typischerweise in Gruppenarbeit.

Die Koordination des Übungbetriebs übernimmt der Dozent.

Abgabegruppen

Die Aufgaben werden in festen Abgabegruppen bearbeitet. Die Abgabegruppen bestehen jeweils aus fünf Personen, die sich zu Beginn der Veranstaltung (bis zur ersten Abgabe) zusammenfinden sollen. Diese Abgabegruppen werden auf StudIP gebildet, indem sich die vier Leute unter einem Gruppenkürzel (z.B. X) eintragen. Dazu geht man auf die Veranstaltung in StudIP, dann TeilnehmerInnen, dann Funktionen/Gruppen.

Auf dem abzugebenden Übungsblatt wird nur dieses Kürzel draufgeschrieben, nicht die einzelnen Namen. Ein Wechsel der Abgabegruppe ist nur in Rücksprache möglich, und wenn in der aufnehmenden Gruppe ein Platz frei geworden ist. Melden Sie sich bitte ab, wenn Sie eine Gruppe verlassen möchten.

Die pro Woche abzugebenden Übungen sollten getackert sein und auf dem Deckblatt, das gestellt wird, die folgenden Informationen enthalten:

Abgabegruppe: X

Rückgabe: Übungsgruppe i ($i = 1, 2, 3$)

In einer Tabelle sollen die Aufgaben, die nicht bearbeitet wurden, durchgestrichen werden.

Dann folgen die Lösungen zu den Aufgaben.

Die Aufgaben sind handschriftlich abzugeben.

Der gemeinsame Abgabetermin für die beiden Arbeitsblätter einer Vorlesungswoche ist Donnerstag um 10:00 im Eingangsbereich 69. Sie werfen die arbeitsgruppenweise erstellten Lösungen (gebündelt mit Deckblatt) in eines der für die Vorlesung bereitgestellten Fächer.

Korrekturen

Die Tutoren korrigieren die Aufgaben, und Sie erhalten die korrigierten Aufgaben in der von Ihnen auf dem Abgabezettel angegebenen Übungsgruppe der nächst folgenden Woche zurück. Wenn Sie eine Korrektur überhaupt nicht nachvollziehen können, wenden Sie sich bitte zuerst an den Korrekteur. Erst dann im Zweifelsfall an den Übungsgruppenleiter.

Bei den Korrekturen sind einige Besonderheiten zu beachten, die mit der relativen Vielzahl an Aufgaben zusammenhängen. Pro Woche können maximal 20 Punkte gut geschrieben werden („Deckelregel“). Bei jeder (Teil-)Aufgabe gilt die „Sockelregel“, die besagt, dass eine Aufgabe (bzw. ein Aufgabenteil) nur dann in die Wertung eingeht, wenn sie zumindest zur Hälfte richtig bearbeitet ist. Es muss also ein „substantieller Beitrag“ zur Lösung der Aufgabe erkennbar sein. Damit soll verhindert werden, dass in der Hoffnung auf Punkte rudimentäre Beiträge abgegeben werden. Diese Sockelregel gilt auch in der Klausur. Für Rechenfehler[1] wird grundsätzlich ein Punkt abgezogen.

Es werden keine Musterlösungen ausgeteilt. Für einzelne Übungsaufgaben (zumeist frühere Klausuraufgaben), die mit einem Stern gekennzeichnet sind, gibt es Lösungen im Netz. In den Übungsgruppen werden auf gezielte Nachfrage hin Lösungsansätze vorgestellt. Grundsätzlich ist zu beachten, dass es zu einer Aufgabe viele Lösungsmöglichkeiten gibt. Es steht nichts entgegen, positiv bewertete Aufgaben auszutauschen (auch im Netz über StudIP, das haben frühere Jahrgänge so gemacht).

Testklausur

Es werden zwei Testklausuren unter den Rahmenbedingungen einer echten Klausur geschrieben (8.11.2014 und 10.1.2015, jeweils 10:00). Die dabei erreichten Punktezahlen gehen doppelt in die Gesamtpunktzahl ein.

Klausurberechtigung

Um für die Klausur zugelassen zu werden, müssen Sie in den Übungen und in den Testklausuren insgesamt 200 Punkte erreichen. Diese Zahl ergibt sich grob aus $200 \leq 14 \cdot 10 + 2 \times 16 + 2 \times 16$, d.h. Sie sollten in den Testklausuren 16 Punkte (die doppelt eingehen) erreichen und pro Woche durchschnittlich mindestens 10 Punkte erreichen (das entspricht etwa der erfolgreichen Bearbeitung von drei mittleren Aufgaben). An dieser Grenze wird nicht gerüttelt. Es wird aber in knappen Fällen die Möglichkeit eingeräumt, in der vorlesungsfreien Zeit Punkte nachträglich zu erwerben.

Wenn Sie in einem früheren Semester den Übungsbetrieb zu dieser Veranstaltung besucht und dadurch die Klausurberechtigung erworben haben, so wird diese Berechtigung akzeptiert. Als Nachweis gilt, dass Sie bei der damaligen Klausur teilgenommen haben.

Sonstiges

[1] Um das Thema Rechenfehler ranken sich weit verbreitete Mythen von Nichtmathematikern. Ein echter Rechenfehler ist so was wie $3 + 4 = 9$, doch tritt das nicht auf. In Wahrheit verbergen sich hinter „Rechenfehlern“ substantielle Denkfehler, falsches Operieren mit Vorzeichen, Fehlinterpretation von Klammern, Vertauschungen, mangelnde Organisation der zu verarbeitenden Information, schlichtes Ignorieren von relevanten Daten, unzureichende Buchführung über Zwischenergebnisse. Bei einer „Rechenaufgabe“ geht es nicht nur darum zu zeigen, dass man ein Verfahren verstanden hat, sondern dass man ein Verfahren korrekt durchführen kann und sich nicht durch das Datenmaterial verwirren lässt.

Zusätzlich zu den Aufgaben gibt es noch einige weitere Möglichkeiten, Punkte zu sammeln. Für die Korrektur eines Fehlers im Skript (auf Wikiversity) gibt es einen halben Punkt, für die Korrektur eines mathematischen Fehlers auch mehr. Für die Bereitstellung von schönen Bildern, Animationen o. Ä. können ebenfalls zusätzliche Punkte vergeben werden. Genaueres auf Anfrage. Diese zusätzlichen Punkte werden zum Schluss des Semesters verrechnet. Sie können auch selbst eigene Aufgaben verfassen (Urheberrecht beachten!), die Punktezahl bestimmt allerdings der Dozent.