Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 9

Reihen

Wir haben in der siebten Vorlesung gesagt, dass man eine Dezimalentwicklung, also eine (unendliche) Ziffernfolge mit Ziffern zwischen 0 und 9 als eine wachsende Folge von rationalen Zahlen auffassen kann. Dabei hat die n-te Nachkommastelle a_{-n} die Bedeutung, dass $a_{-n} \cdot 10^{-n}$ zur vorhergehenden Approximation hinzu zu addieren ist. Die Ziffernfolge gibt also direkt die Differenz der Folgenglieder an, und die Folgenglieder ergeben sich durch Aufsummieren dieser Differenzen. Diese Sichtweise führt zum Begriff der Reihe.

Definition 9.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Unter der *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ versteht man die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, .$$

Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sagt man, dass die *Reihe konvergiert*. In diesem Fall schreibt man für den Grenzwert ebenfalls

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

und nennt ihn die *Summe* der Reihe.

Alle Begriffe für Folgen übertragen sich auf Reihen, indem man eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ als Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ auffasst. Wie schon bei Folgen kann es sein, dass die Summation nicht bei $k = 0$, sondern bei einer anderen Zahl beginnt.

Beispiel 9.2. Wir wollen die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

berechnen, wozu wir zuerst eine Formel für die n-te Partialsumme angeben. Es ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Diese Folge konvergiert gegen 1, so dass die Reihe konvergiert und ihre Summe gleich 1 ist.

Lemma 9.3. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von komplexen Zahlen. Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn das folgende Cauchy-Kriterium *erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \epsilon$$

gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 9.3. □

Lemma 9.4. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von komplexen Zahlen mit den Summen s und t. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_n = a_n + b_n$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.*
(2) *Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_n = \lambda a_n$ konvergent mit der Summe λs.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.4. □

Lemma 9.5. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Dann ist

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 9.3. □

Es ist also eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden. Diese Bedingung ist nicht hinreichend, wie die *harmonische Reihe* zeigt.

Nikolaus von Oresme (1330-1382) bewies, dass die harmonische Reihe divergiert.

Beispiel 9.6. Die *harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,.$$

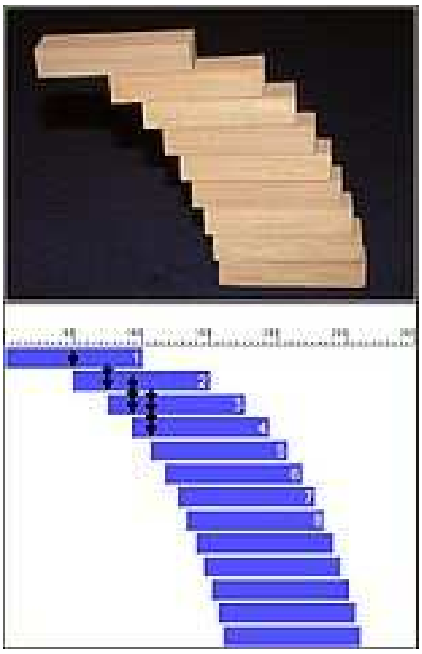
Diese Reihe divergiert: Für die 2^n Zahlen $k = 2^n + 1, \dots, 2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \;\geq\; \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} \;=\; 2^n \frac{1}{2^{n+1}} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \;=\; 1 + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \right) \;\geq\; 1 + (n+1)\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 5.8 nicht konvergent sein.



Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt, dass man einen beliebig weiten Überhang mit gleichförmigen Bauklötzen bauen kann.

Die folgende Aussage heißt *Leibnizkriterium für alternierende Reihen.*

SATZ 9.7. *Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x_k$.

Beweis. Wir setzen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x_k \, .$$

Wir betrachten die Teilfolge mit geradem Index. Für jedes n gilt wegen $x_{2n+2} \leq x_{2n+1}$ die Beziehung

$$s_{2(n+1)} \;=\; s_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} \;\leq\; s_{2n},$$

d.h. diese Teilfolge ist fallend. Ebenso ist die Folge der ungeraden Teilsummen wachsend. Es gelten die Abschätzungen

$$s_0 \;\geq\; s_{2n} \;\geq\; s_{2n-1} \;\geq\; s_1 .$$

Daher sind die beiden Teilfolgen fallend und nach unten beschränkt bzw. wachsend und nach oben beschränkt, und daher wegen Korollar 7.1 konvergent. Wegen $s_{2n} - s_{2n-1} = x_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ stimmen die Grenzwerte überein. $\square$

Absolute Konvergenz

Definition 9.8. Eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

von komplexen Zahlen heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Satz 9.9. *Eine absolut konvergente Reihe von komplexen Zahlen konvergiert.*

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden das Cauchy-Kriterium an. Aufgrund der absoluten Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \epsilon$$

gilt. Daher ist

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| \leq \epsilon,$$

was die Konvergenz bedeutet. □

Beispiel 9.10. Eine konvergente Reihe muss nicht absolut konvergieren, d.h. Satz 9.9 lässt sich nicht umkehren. Aufgrund des Leibnizkriteriums konvergiert die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots ,$$

und zwar ist ihr Grenzwert ln 2, was wir hier aber nicht beweisen. Die zugehörige absolute Reihe ist aber die harmonische Reihe, die nach Beispiel 9.6 divergiert.

Die folgende Aussage heißt das *Majorantenkriterium.*

Satz 9.11. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *eine konvergente Reihe von reellen Zahlen und* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine Folge komplexer Zahlen mit* $|a_k| \leq b_k$ *für alle* k. *Dann ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergent.

Beweis. Das folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium. □

Beispiel 9.12. Wir wollen bestimmen, ob die Reihe

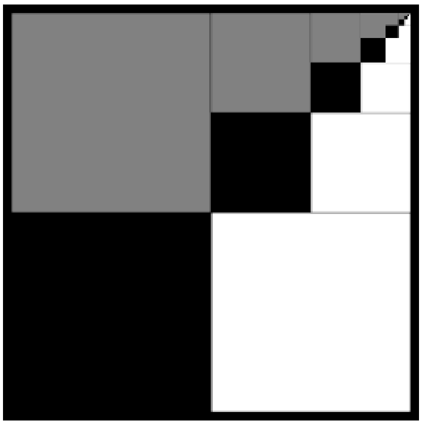
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert oder nicht. Dazu ziehen wir das Majorantenkriterium und Beispiel 9.2 heran, wo wir die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ gezeigt haben. Für $k \geq 2$ ist

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}\,.$$

Daher konvergiert $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und somit auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Über den Wert der Summe ist damit noch nichts gesagt. Mit deutlich aufwändigeren Methoden kann man zeigen, dass diese Summe gleich $\frac{\pi^2}{6}$ ist.

Die geometrische Reihe und das Quotientenkriterium



Dieses Bild veranschaulicht das Verhalten der geometrischen Reihe zu $x = \frac{1}{4}$. Die Grundseite des Quadrates sei 2, dann passt die geometrische Reihe dreimal in dieses Quadrat rein. Der jeweilige Flächeninhalt der drei Reihen ist $\frac{4}{3}$.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ heißt *geometrische Reihe* zu $z \in \mathbb{C}$, es geht also um die Summe

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\,.$$

Die Konvergenz hängt wesentlich vom Betrag von z ab.

Satz 9.13. *Für alle komplexen Zahlen z mit $|z| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ absolut und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}\,.$$

Beweis. Für jedes z gilt die Beziehung

$$(z-1)(\sum_{k=0}^{n} z^k) = z^{n+1} - 1$$

und daher gilt für die Partialsummen die Beziehung (bei $z \neq 1$)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

Für $n \to \infty$ und $|z| < 1$ konvergiert dies gegen $\frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$. □

Die folgende Aussage heißt *Quotientenkriterium.*

Satz 9.14. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von komplexen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ (Insbesondere sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

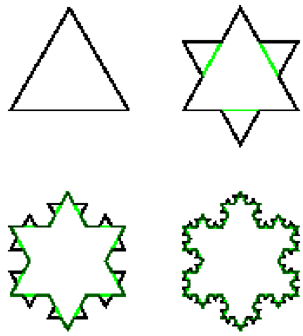
Beweis. Die Konvergenz[1] ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq a_0 q^k.$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe. □

Beispiel 9.15. Unter den *Kochschen Schneeflocken* versteht man die Folge K_n der folgendermaßen rekursiv definierten ebenen Figuren: Die Ausgangsfigur K_0 ist ein gleichseitiges Dreieck. Die Figur K_{n+1} entsteht aus K_n, indem man in jeder Begrenzungskante von K_n das mittlere Drittel durch die beiden Schenkel eines darauf aufgesetzten nach außen gerichteten gleichmäßigen Dreiecks ersetzt.

[1] Wohl aber die Summe.



Es sei A_n der Flächeninhalt und L_n die Länge des Randes der n-ten Kochschen Schneeflocke. Wir wollen zeigen, dass die Folge A_n konvergiert und die Folge L_n bestimmt gegen ∞ divergiert.

Die Anzahl der Kanten von K_n ist $3 \cdot 4^n$, da bei jedem Unterteilungsschritt eine Kante durch vier Kanten ersetzt wird, deren Länge $1/3$ der Länge der Vorgängerkante ist. Es sei r die Seitenlänge des gleichseitigen Ausgangsdreiecks. Dann besteht K_n aus $3 \cdot 4^n$ Kanten der Länge $r\left(\frac{1}{3}\right)^n$ und die Gesamtlänge der Kanten von K_n ist gleich

$$L_n = 3 \cdot 4^n r \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3r \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Wegen $\left(\frac{4}{3}\right) > 1$ divergiert dies gegen ∞.

Beim Übergang von K_n nach K_{n+1} kommt für jede Kante ein neues Dreieck mit gedrittelter Seitenlänge hinzu. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge s ist $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ (Grundseite mal Höhe durch 2). Im Schritt von K_n nach K_{n+1} kommen somit $3 \cdot 4^n$ Dreiecke mit dem Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n+1)} r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$ hinzu. Daher ist der Gesamtflächeninhalt von K_n gleich

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(1 + 3\frac{1}{9} + 12\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 48\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots + 3 \cdot 4^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^n\right) \\ = \; & \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Wenn wir hinten die erste 1 und den Faktor $\frac{3}{4}$ ignorieren, was die Konvergenzeigenschaft nicht ändert, so steht in der Klammer die Partialsumme einer geometrischen Reihe zu $\frac{4}{9}$, welche konvergiert.

Abbildungsverzeichnis