Analysis III

Vorlesung 85

In dieser Vorlesung setzen wir die Theorie der riemannschen Mannigfaltigkeiten fort und berechnen insbesondere einige Flächeninhalte.

Berechnungen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten

Korollar 85.1. *Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und*

$$\psi \colon W \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Es sei

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n, \psi(x_1, \ldots, x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in W\} \subseteq W \times \mathbb{R}$$

der Graph von ψ. Dann ist M eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit, und für die kanonische Volumenform ω auf M gilt

$$(\mathrm{Id} \times \psi)^*(\omega) = \left(1 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Beweis. Die Abbildung

$$\varphi = \mathrm{id} \times \psi \colon W \longrightarrow W \times \mathbb{R},\, x \longmapsto (x, \psi(x)),$$

ist ein Diffeomorphismus zwischen W und dem Graphen M. Der Graph ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $W \times \mathbb{R}$ und trägt daher die induzierte riemannsche Struktur und (da sich die Orientierung von W auf M überträgt) eine kanonische Volumenform ω. Auf diese Situation kann man Satz 84.8 anwenden. Die partiellen Ableitungen von φ nach der i-ten Variablen sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \end{pmatrix}.$$

Sei $Q \in W$ ein Punkt, den wir in die Funktionen im Folgenden einsetzen, so dass wir überall mit reellen Zahlen rechnen. Die Skalarprodukte, die die

Einträge b_{ij} der Matrix B bilden (von deren Determinante wir die Wurzel berechnen müssen), sind gleich

$$b_{ij} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(Q), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(Q) \right\rangle = \begin{cases} 1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(Q)\right)^2 & \text{bei } i = j \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(Q) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(Q) & \text{bei } i \neq j\,. \end{cases}$$

Es ist also $B = E_n + A$ mit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Mit $c_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(Q)$ können wir $a_{ij} = c_i c_j$ und insgesamt die Matrix A als

$$A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (c_1, \ldots, c_n)$$

schreiben. Daher beschreibt A eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$, die durch $\mathbb{R}$ faktorisiert, und besitzt damit einen Kern, der zumindest $(n-1)$-dimensional ist. Nennen wir ihn K. Wenn er die Dimension n besitzt, so ist $A = 0$ und B ist die Identität, und die Aussage ist richtig. Sei also $A \neq 0$. Dann ist $v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0$. Dieser Vektor ist ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $1 + c_1^2 + \cdots + c_n^2$ und K bildet den $(n-1)$-dimensionalen Eigenraum für B zum Eigenwert 1. Insgesamt ist B diagonalisierbar und ihre Determinante ist das Produkt der Eigenwerte, also gleich $1 + c_1^2 + \cdots + c_n^2$. □

Mit diesem Ansatz kann man beispielsweise den Flächeninhalt der Einheitssphäre berechnen, siehe Aufgabe 85.2.

Korollar 85.2. *Es sei $M \subseteq G$ eine abgeschlossene Fläche*[1] *in einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^3$, die mit der induzierten riemannschen Struktur und der kanonischen Flächenform ω versehen sei. Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und es sei*

$$\varphi \colon W \longrightarrow U$$

ein Diffeomorphismus mit der offenen Menge $U \subseteq M$. Die Koordinaten von $\mathbb{R}^2$ seien u und v und wir setzen [2]

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \end{pmatrix} \right\rangle, F = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } G = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dann gilt auf W

$$\varphi^*(\omega|_U) = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 84.8. □

[1] Eine Fläche ist einfach eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

[2] Diese Notation wurde schon von Carl Friedrich Gauß verwendet.

Bemerkung 85.3. Es sei
$$M = \{(u,v,\psi(u,v)) | (u,v) \in W\} \subseteq W \times \mathbb{R}$$
der Graph von
$$\psi\colon W \longrightarrow \mathbb{R},$$
wobei $W \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge sei. In diesem Fall stehen Korollar 85.1 und Korollar 85.2 wie folgt miteinander in Beziehung. Die partiellen Ableitungen sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}$. Daher ist $E = 1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2$, $F = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}$, und $G = 1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2$. Somit ist
$$EG - F^2 = \left(1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 .$$

Bemerkung 85.4. Wir knüpfen an die Bezeichnungen von Korollar 85.2 an. Wenn die durch W und φ erfasste offene Teilmenge $U \subseteq M$ die Eigenschaft besitzt, dass ihr Komplement $M \setminus U$ eine Nullmenge bezüglich dem kanonischen Maß auf M ist, so lässt sich der Flächeninhalt von M allein mittels der Formel für $\varphi^*(\omega|U)$ berechnen. Dies ist z.B. der Fall, wenn $M \setminus U$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M der Dimension ≤ 1 ist, siehe Aufgabe 83.14. Nullmengen werden bei Berechnungen häufig stillschweigend ignoriert.

Rotationsflächen

Es sei eine differenzierbare Kurve
$$\gamma\colon \,]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (x(t), y(t)),$$
mit $y(t) \geq 0$ gegeben. Wir interessieren uns für die zugehörige Rotationsfläche, also die Teilmenge
$$\{(x(t), y(t) \cos \alpha \,, y(t) \sin \alpha\,) | \, t \in [a,b],\, \alpha \in [0, 2\pi]\}$$
des $\mathbb{R}^3$, die entsteht, wenn man die Trajektorie der Kurve um die x-Achse dreht. Wir setzen zusätzlich voraus, dass γ einen Diffeomorphismus auf sein Bild $M = \gamma\,(]a,b[)$ bewirkt und dass M eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit in einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ist (es wird also gefordert, dass γ überall positiv ist). Die Rotationsfläche ist dann eine zweidimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ohne die x-Achse, so dass eine riemannsche Mannigfaltigkeit vorliegt. Ihr Flächeninhalt lässt sich wie folgt berechnen.

Satz 85.5. *Es sei*
$$\gamma\colon \,]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (x(t), y(t)),$$

eine differenzierbare Kurve mit $y(t) > 0$, die einen Diffeomorphismus zu $M = \gamma(I)$ induziere, wobei $M \subseteq G$ eine eindimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit in einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ sei. Dann ist die zugehörige Rotationsfläche eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ohne die x-Achse, und ihr Flächeninhalt ist gleich

$$2\pi \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot y(t)\, dt\,.$$

Beweis. Es sei S die Rotationsfläche, die eine abgeschlossene zweidimensionale Untermannigfaltigkeit in einer offenen Menge des $\mathbb{R}^3$ ist. Wir wenden Korollar 85.2 auf die Parametrisierung

$$]a,b[\times]0,2\pi[\longrightarrow S,\ (t,\alpha) \longmapsto (x(t), y(t)\, \cos\, \alpha\,, y(t)\, \sin\, \alpha\,),$$

an. Die partiellen Ableitungen sind

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t)\, \cos\, \alpha \\ y'(t)\, \sin\, \alpha \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ -y(t)\, \sin\, \alpha \\ y(t)\, \cos\, \alpha \end{pmatrix}$$

und daher ist

$$E(t,\alpha) = (x'(t))^2 + (y'(t))^2,\ F(t,\alpha) = 0,\ G(t,\alpha) = (y(t))^2\,.$$

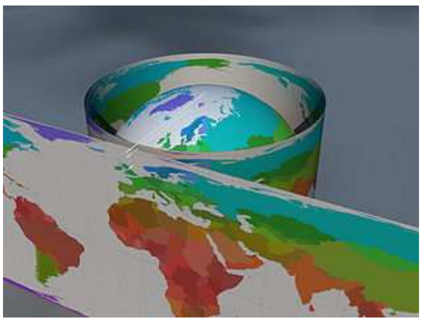
Somit ist der Flächeninhalt gleich

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot y(t)\, d\alpha\, dt \;=\; 2\pi \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot y(t)\, dt.$$

□

Kartographie

Die (abstrakte) Kartographie beschäftigt sich mit Karten für die Oberfläche einer Kugel.



Beispiel 85.6. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon\ [0,2\pi]\times[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ (u,v)\longmapsto\left(\sqrt{1-v^2}\,\cos u\,,\ \sqrt{1-v^2}\,\sin u\,,\ v\right),$$

deren Bild auf der *Einheitssphäre* liegt. Diese Abbildung kann man sich so vorstellen, dass zuerst das Rechteck zu einer Zylinderoberfläche gemacht wird und anschließend die Kreise des Zylinders auf die horizontalen Kreise einer Kugel mit derselben Höhe projeziert werden. Diese Abbildung ist differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\begin{pmatrix}-\sqrt{1-v^2}\,\sin u\\ \sqrt{1-v^2}\,\cos u\\ 0\end{pmatrix}\ \text{ und }\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}=\begin{pmatrix}\frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\,\cos u\\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\,\sin u\\ 1\end{pmatrix}.$$

Die Einschränkung dieser Abbildung auf das offene Rechteck ist injektiv, ihr Bild ist die Einheitssphäre bis auf einen einzigen halben Längenkreis. Man kann mit diesen Koordinaten also die Kugeloberfläche berechnen. Mit der in Korollar 85.2 verwendeten Notation ist

$$E\ =\ \left(1-v^2\right)\,\sin^2 u\,+\left(1-v^2\right)\,\cos^2 u\ =\ 1-v^2,$$

$$F\ =\ v\,\sin u\,\cos u\,-v\,\sin u\,\cos u\ =\ 0$$

und

$$G\ =\ \frac{v^2}{1-v^2}\,\cos^2 u\,+\frac{v^2}{1-v^2}\,\sin^2 u\,+1\ =\ \frac{v^2}{1-v^2}+1\ =\ \frac{1}{1-v^2}.$$

Daher ist

$$\sqrt{EG-F^2}\ =\ 1,$$

d.h. diese Kartenabbildung ist *flächentreu*,[3] und somit ist die Kugeloberfläche gleich

$$\begin{aligned}A\ &=\ \int_{]-1,1[\times]0,2\pi[}1du\wedge dv\\ &=\ \int_{[-1,1]\times[0,2\pi]}1\,d\lambda^2\\ &=\ 2\cdot 2\pi\\ &=\ 4\pi.\end{aligned}$$

Beispiel 85.7. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon\ [0,2\pi]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ (u,v)\longmapsto\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}(\cos u\,,\ \sin u\,,v),$$

deren Bild auf der *Einheitssphäre* liegt. Diese Abbildung kann man sich so vorstellen, dass zuerst das (in eine Richtung unbeschränkte) Rechteck $[0,2\pi]\times\mathbb{R}$ zu einem unendlichen Zylindermantel über dem Einheitskreis gemacht wird und anschließend jeder Punkt dieses Zylindermantels über die Verbindungsgerade mit dem Kugelmittelpunkt auf die Kugel projeziert wird.

[3] Sie ist aber nicht längentreu. Die horizontalen Strecken auf dem Rechteck werden zu den Polen hin stark gestaucht. Dafür werden die vertikalen Strecken zu den Polen hin zunehmend gestreckt, und diese beiden Phänomene neutralisieren sich.

Unter dieser Abbildung werden mit der Ausnahme des Nord- und des Südpols alle Punkte der Kugeloberfläche erreicht. Ferner ist sie injektiv, wenn man die Randpunkte des Intervalls herausnimmt (dann fehlt ein halber Längenkreis im Bild). Die Abbildung ist differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin u}{\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{-v\cos u}{(\sqrt{1+v^2})^3} \\ \frac{-v\sin u}{(\sqrt{1+v^2})^3} \\ \frac{\sqrt{1+v^2}-v^2(1+v^2)^{-1/2}}{1+v^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(\sqrt{1+v^2})^3} \begin{pmatrix} -v \\ -v \end{pmatrix}$$

Man kann mit diesen Koordinaten die Kugeloberfläche berechnen. Mit der in Korollar 85.2 verwendeten Notation ist

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{1+v^2}, \\ F &= 0 \end{aligned}$$

und

$$G = \frac{1}{(1+v^2)^3}\left(v^2\cos^2 u + v^2\sin^2 u + 1\right) = \frac{1}{(1+v^2)^2}.$$

Daher ist

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{\frac{1}{(1+v^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}^3}.$$

Die Kugeloberfläche ist nach Satz 72.10 gleich

$$\begin{aligned} A &= \int_{]0,2\pi[\times\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1+v^2}^3} du \wedge dv \\ &= \int_{]0,2\pi[\times\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1+v^2}^3}\, d\lambda^2 \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+v^2}^3}\, dv. \end{aligned}$$

Das Integral ist nach Beispiel 31.7 gleich 2, so dass sich der Flächeninhalt 4π ergibt.

Die *Mercator-Projektion* geht von der zuletzt genannten Projektion aus, ersetzt aber das unbeschränkte Intervall $\mathbb{R}$ über eine Diffeomorphie durch ein beschränktes Intervall, so dass eine winkeltreue Karte entsteht.

Beispiel 85.8. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u,v) \longmapsto (\cos u\, \cos v, \cos u\, \sin v, \sin u),$$

deren Bild auf der *Einheitssphäre* landet. Geographisch gesprochen gibt u den *Breitenkreis* und v den *Längenkreis* des entsprechenden Punktes auf der Einheitserde an (in *geozentrischen Koordinaten*; die in der Geographie verwendeten Koordinaten weichen davon leicht ab, da die Erde nicht wirklich eine Kugel ist). Diese Abbildung ist differenzierbar mit den partiellen

Ableitungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u \ \cos v \\ -\sin u \ \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cos u \ \sin v \\ \cos u \ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Einschränkung dieser Abbildung auf das offene Rechteck

$$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\pi,\pi[$$

ist injektiv, ihr Bild ist die Einheitskugel bis auf einen einzigen Längenkreis. Man kann mit diesen Koordinaten also die Kugeloberfläche berechnen. Mit der in Korollar 85.2 verwendeten Notation ist

$$E = \sin^2 u \ \cos^2 v + \sin^2 u \ \sin^2 v + \cos^2 u = \sin^2 u + \cos^2 u = 1,$$

$$F = \sin u \ \cos u \ \sin v \ \cos v - \sin u \ \cos u \ \sin v \ \cos v = 0$$

und

$$G = \cos^2 u \ \sin^2 v + \cos^2 u \ \cos^2 v = \cos^2 u\,.$$

Daher ist

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 \cdot \cos^2 u} = \cos u\,.$$

Somit ist die Kugeloberfläche nach dem Satz von Fubini gleich

$$\begin{aligned} A &= \int_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\pi,\pi[} \cos u \, du \wedge dv \\ &= \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[-\pi,\pi]} \cos u \ d\lambda^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \ du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 2 \, dv \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Abbildungsverzeichnis