Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Vorlesung 83

Wir kommen nun zur Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten. Ausgangspunkt dafür ist, dass auf einer Mannigfaltigkeit der Dimension n eine n-Form gegeben ist. Bei einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ entspricht dabei die Integration bezüglich der Form $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ der Integration bezüglich des Lebesgue-Maßes. Bei einer Mannigfaltigkeit muss man die Form und das zugehörige Maß „zusammenkleben".

Positive Volumenform auf einer Mannigfaltigkeit

In der folgenden Definition bezeichnen wir zu einer Karte $\alpha\colon U \to V$ und einer Differentialform ω auf U die nach V transportierte Differentialform mit $\alpha_*\omega$. Das ist dasselbe wie die zurückgezogene Form $\alpha^{-1*}\omega$.

Definition 83.1. Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und ω eine messbare n-Differentialform auf M. Dann heißt ω eine *positive Volumenform*, wenn für jede Karte (eines gegebenen Atlases)

$$\alpha\colon U \longrightarrow V$$

(mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_n$) in der lokalen Darstellung der Differentialform

$$\alpha_*\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

die Funktion f überall positiv ist.[1]

Dabei ist die Funktion f durch

$$f(Q) = \omega\left(\alpha^{-1}(Q), T_Q\left(\alpha^{-1}\right)(e_1) \wedge \ldots \wedge T_Q\left(\alpha^{-1}\right)(e_n)\right)$$

festgelegt. Eine solche positive Volumenform kann es nur geben, wenn die Mannigfaltigkeit orientierbar ist (siehe Lemma 83.5 weiter unten).

Lemma 83.2. *Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie und es sei ω eine positive Volumenform auf M. Zu einer Karte*

$$\alpha\colon U \longrightarrow V$$

mit $\alpha_*(\omega|_U) = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ und einer messbaren Teilmenge $T \subseteq U$ setzen wir

$$\nu(\alpha, T) := \int_{\alpha(T)} f \, d\lambda^n$$

[1] Die zur Karte U gehörenden Funktionen f, die hier mit der n-Standardform multipliziert werden, entsprechen den am Ende der 81sten Vorlesung erwähnten Dichten, mit denen ein Maß auf der Mannigfaltigkeit beschrieben werden kann.

Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn* $T \subseteq U_1, U_2$ *zwei Kartenumgebungen sind, so ist* $\nu(\alpha_1, T) = \nu(\alpha_2, T)$.
(2) *Zu einer messbaren Teilmenge* $T \subseteq M$ *gibt es eine abzählbare disjunkte Vereinigung* $T = \biguplus_{i \in I} T_i$ *derart, dass jedes* T_i *ganz in einer Karte* U_i *liegt.*
(3) *Die Summe* $\sum_{i \in I} \nu(\alpha_i, T_i)$ *ist unabhängig von der gewählten abzählbaren disjunkten Zerlegung in (2).*

Beweis. (1). Wegen $T \subseteq U_1 \cap U_2$ können wir $U = U_1 = U_2$ annehmen (aber mit unterschiedlichen Kartenabbildungen α_1 und α_2 nach V_1 bzw. V_2). Es sei

$$\psi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} \colon V_1 \longrightarrow V_2$$

der diffeomorphe Kartenwechsel. Dann gelten nach Satz 74.3 und nach Lemma 82.8, und da wegen der Positivität von $f_1 = (f_2 \circ \psi) \det(D\psi)$ und von f_2 auch die Determinante positiv ist, die Gleichheiten

$$\begin{aligned} \nu(\alpha_2, T) &= \int_{\alpha_2(T)} f_2 \, d\lambda^n \\ &= \int_{\alpha_1(T)} (f_2 \circ \psi) |\det(D\psi)| \, d\lambda^n \\ &= \int_{\alpha_1(T)} (f_2 \circ \psi) \cdot \det(D\psi) \, d\lambda^n \\ &= \int_{\alpha_1(T)} f_1 \, d\lambda^n \\ &= \nu(\alpha_1, T). \end{aligned}$$

(2). Es sei U_n, $n \in \mathbb{N}$, eine abzählbarer Atlas. Dann kann man die Mengen $T_n = T \cap (U_n \setminus \bigcup_{m<n} U_m)$ nehmen. (3). Es seien $T = \biguplus_{i \in I} T_i = \biguplus_{j \in J} S_j$ zwei abzählbare disjunkte messbare Zerlegungen, deren Glieder jeweils in Karten enthalten seien. Die Karten seien einerseits (U_i, α_i) mit den die Form beschreibenden Funktionen f_i und andererseits (V_j, β_j) mit den die Form beschreibenden Funktionen g_j. Wir betrachten die ebenfalls abzählbare Zerlegung, die durch die Mengen $T_i \cap S_j$, $(i,j) \in I \times J$, gegeben ist. Nach Lemma 70.1 (angewendet auf die einzelnen Kartenbilder) gilt dann unter Verwendung von Teil (1)

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \left(\int_{\alpha_i(T_i)} f_i \, d\lambda^n \right) &= \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} \int_{\alpha_i(T_i \cap S_j)} f_i \, d\lambda^n \right) \\ &= \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} \int_{\beta_j(T_i \cap S_j)} g_j \, d\lambda^n \right) \\ &= \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} \int_{\beta_j(T_i \cap S_j)} g_j \, d\lambda^n \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j \in J} \left(\int_{\beta_j(S_j)} g_j \, d\lambda^n \right).$$

□

Definition 83.3. Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Topologie und es sei ω eine positive Volumenform auf M. Dann heißt die für jede Borelmenge $T \subseteq M$ durch eine abzählbare Zerlegung $T = \biguplus_{i \in I} T_i$ (wobei $T_i \subseteq U_i$ ein offenes Kartengebiet und $\alpha_{i*}\omega = f_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ist) definierte Zahl

$$\int_T \omega = \sum_{i \in I} \int_{\alpha_i(T_i)} f_i \, d\lambda^n$$

(aus $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$) das *Maß* von T zu ω oder das *Integral* von ω über T.

Nach dem vorstehenden Lemma ist dieses Volumenmaß wohldefiniert. Nach Aufgabe 83.2 handelt es sich um ein σ-endliches Maß. Für eine offene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, eine messbare Teilmenge $T \subseteq M$ und eine positive n-Form $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ist einfach

$$\int_T \omega = \int_T f d\lambda^n.$$

Lemma 83.4. *Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Topologie und es seien ω_1 und ω_2 positive Volumenformen auf M. Dann gilt für jede messbare Teilmenge $T \subseteq M$ und $a, b \in \mathbb{R}_+$ die Beziehung*

$$\int_T (a\omega_1 + b\omega_2) = a \int_T \omega_1 + b \int_T \omega_2.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 83.5. □

Volumenformen und Orientierung

Die Existenz einer stetigen nullstellenfreien Volumenform auf einer Mannigfaltigkeit hängt eng mit ihrer Orientierbarkeit zusammen. Von der folgenden Aussage werden wir in Satz 88.9 auch die Umkehrung beweisen.

Lemma 83.5. *Es sei M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und ω eine stetige nullstellenfreie Volumenform auf M. Dann gibt es einen (diffeomorph-äquivalenten) orientierten Atlas für M derart, dass ω eine positive Volumenform bezüglich dieses Atlases wird. Insbesondere ist M orientierbar.*

Beweis. Zu $P \in M$ betrachtet man Kartengebiete $P \in U$ mit der Eigenschaft, dass U homöomorph zu einem offenen Ball $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ist. Es ist

$$\bigwedge^m TU \cong \bigwedge^m TV \cong V \times \bigwedge^m \mathbb{R}^m \cong V \times \mathbb{R}$$

mittels $\bigwedge^m T(\alpha)$. Dabei ist die hintere Isomorphie durch die Standardbasis mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ gegeben. Es sei $\alpha_* \omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ die zugehörige 1-Differentialform auf V. Diese Form ist nullstellenfrei, und da V zusammenhängend ist, ist f nach dem Zwischenwertsatz positiv oder negativ. Im negativen Fall ersetzen wir die Karte, indem wir ein Basiselement durch sein Negatives ersetzen. Dadurch gewinnen wir für jeden Punkt eine Kartenumgebung, auf der die Form positiv ist. Zu zwei Karten $\alpha\colon U \to V$ und $\beta\colon U \to V'$ mit der Übergangsabbildung $\psi = \beta \circ \alpha^{-1}$ und den lokalen Beschreibungen $\alpha_* \omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ und $\beta_* \omega = g dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m$ gilt dann wegen $\psi^*(\beta_* \omega) = \alpha_* \omega$ nach Lemma 82.8 die Beziehung $f = g \circ \psi \det(D\psi)$. Da f und g positiv sind, muss auch die Determinante positiv sein, so dass die Übergangsabbildung orientierungstreu und die Mannigfaltigkeit somit orientiert ist. □

Korollar 83.6. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei*

$$\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

(mit $m = n - \ell \geq 0$) eine stetig differenzierbare Abbildung, die in jedem Punkt der Faser M über $0 \in \mathbb{R}^\ell$ regulär sei. Dann ist die Abbildung

$$\bigwedge^m T_P M \longrightarrow \mathbb{R},\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_m \longmapsto \det(\operatorname{Grad} \varphi_1(P), \ldots, \operatorname{Grad} \varphi_\ell(P), v_1, \ldots, v_m),$$

in jedem Punkt $P \in M$ eine Isomorphie, wodurch eine stetige nullstellenfreie Volumenform auf M gegeben ist.

Beweis. Bei dieser Abbildung werden die Vektoren $v_i \in T_P M \subseteq T_P \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ und die Gradienten als Vektoren in $\mathbb{R}^n$ aufgefasst. Nach Aufgabe 80.12 und nach Korollar 79.7 ist die Abbildung wohldefiniert und linear. Der Ausgangsraum der Abbildung ist wie der Zielraum eindimensional. Es sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von

$$T_P M = \operatorname{kern}(D\varphi)_P = (\operatorname{Grad} \varphi_1(P), \ldots, \operatorname{Grad} \varphi_\ell(P))^\perp.$$

Da die Abbildung regulär ist, sind die Gradienten untereinander linear unabhängig, und wegen der Orthogonalitätsbeziehung erst recht linear unabhängig zu den v_i. Daher liegt insgesamt eine Basis des $\mathbb{R}^n$ vor, so dass nach Satz Anhang C.10 die Determinante $\neq 0$ ist. Die Abhängigkeit dieser Volumenform vom Basispunkt P ist stetig, wie aus der Stetigkeit der Gradienten, der Stetigkeit der Determinante und dem Satz über implizite Abbildungen folgt. □

Bemerkung 83.7. In der Situation von Korollar 83.6 erhält man nicht nur eine nullstellenfreie Volumenform, sondern auch eine Orientierung auf jedem Tangentialraum und überhaupt eine orientierte Mannigfaltigkeit. Man definiert die Orientierung auf T_PM dadurch, dass man festlegt, dass eine Basis $v_1, \ldots, v_m$ die Orientierung repräsentiert, wenn die erweiterte Basis $\operatorname{Grad} \varphi_1(P), \ldots, \operatorname{Grad} \varphi_\ell(P), v_1, \ldots, v_m$ die Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ repräsentiert.

Beispiel 83.8. Wir betrachten die 2-Sphäre S^2 als Faser über 0 zur differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Wir können darauf Korollar 83.6 anwenden und erhalten durch

$$\bigwedge^2 T_P S^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ v_1 \wedge v_2 \longmapsto \det\left(\operatorname{Grad} \varphi(P), v_1, v_2\right)$$

(wobei die Tangentenvektoren v_1 und v_2 wegen $T_P S^2 \subseteq T_P \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ direkt im $\mathbb{R}^3$ aufgefasst werden können), eine stetige nullstellenfreie Volumenform ω. Dies führt zu einer positiven Volumenform und zu einer Orientierung auf S^2. Zwei linear unabhängige Tangentialvektoren v_1 und v_2 repräsentieren die Orientierung, wenn $\omega(v_1, v_2) > 0$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn die drei Vektoren $\operatorname{Grad} \varphi(P)$, v_1, v_2 die Standardorientierung des $\mathbb{R}^3$ repräsentieren.

Beispiel 83.9. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge,

$$h\colon\ V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ der zugehörige Graph, den wir als n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit auffassen, die zu V über $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, h(x_1, \ldots, x_n))$ diffeomorph ist. Diese Mannigfaltigkeit ist zugleich die Faser über 0 unter der Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n, y) \longmapsto h(x_1, \ldots, x_n) - y.$$

Der Gradient dieser Abbildung ist

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(P),\ \ldots,\ \frac{\partial h}{\partial x_n}(P),\ -1\right)$$

Nach Korollar 83.6 liefert daher die Zuordnung

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(P) & v_{11} & \ldots & v_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n}(P) & v_{1n} & \ldots & v_{nn} \\ -1 & v_{1n+1} & \ldots & v_{nn+1} \end{pmatrix}$$

eine stetige nullstellenfreie n-Form ω auf M. Wenn man diese Form über die oben beschriebene (einzige) Karte nach V zurückzieht, so ist $\alpha_* \omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, wobei sich $f(Q)$ als Wert der Form ω im Punkt $\alpha^{-1}(Q) \in M$ bezüglich den Vektoren $T_Q(\alpha^{-1})(e_1), \ldots, T_Q(\alpha^{-1})(e_n)$ ergibt. Wegen

$$T_Q(\alpha^{-1})(e_i)\ =\ (e_i, \frac{\partial h}{\partial x_i}(Q))$$

ist dies

$$
\begin{aligned}
f(Q) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(Q) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(Q) & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n}(Q) & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -1 & \frac{\partial h}{\partial x_1}(Q) & \frac{\partial h}{\partial x_2}(Q) & \ldots & \frac{\partial h}{\partial x_1}(Q) \end{pmatrix} \\
&= \pm \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(Q) \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial h}{\partial x_n}(Q) \right)^2 + 1 \right),
\end{aligned}
$$

wobei das Vorzeichen von n abhängt.

Integration längs einer differenzierbaren Abbildung

Auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M sind nur n-Formen über M sinnvoll integrierbar. Man möchte aber auch k-Formen ($1 \leq k \leq n$) über gewisse k-dimensionale Unterobjekte integrieren können. Das passende Konzept ist dabei die Integration längs einer differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon\, L \longrightarrow M$$

einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit L. Dabei integriert man über L einfach die mit φ zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ zu einer Form $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$. Auf L passen dabei die Dimension und der Grad der Form zusammen. Ein wichtiger Spezialfall ist dabei der von 1-Formen und differenzierbaren Kurven

$$\gamma\colon\, I \longrightarrow M,$$

die dabei entstehenden Integrale nennt man *Wegintegrale*.

Definition 83.10. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ eine 1-Differentialform. Es sei

$$\gamma\colon\, [a,b] \longrightarrow M$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} \gamma^* \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t); \gamma'(t))\, dt$$

das *Wegintegral* von ω längs γ.

Dabei ist $\gamma'(t) = (T_t\gamma)(1) \in T_{\gamma(t)}M$.

Bemerkung 83.11. Im physikalischen Kontext beschreibt eine 1-Differentialform (bzw. ihre duale Version, ein Vektorfeld) eine Kraft; das Wegintegral ist dann der *Arbeitsaufwand* oder die *Energie*, die gebraucht oder freigesetzt wird, wenn sich ein Teilchen auf dem Weg bewegt.

Häufig werden wir Differentialformen auf einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq G$, G offen in $\mathbb{R}^n$, betrachten, die sogar auf G definiert sind und daher die Gestalt $\omega = \sum_{i=1}^n g_i dx_i$ besitzen, wobei die x_i die Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ und die g_i auf G definierte Funktionen sind. Für einen Weg in M ist es nach Aufgabe 83.7 gleichgültig, ob man das Wegintegral mit Bezug auf G und ω oder mit Bezug auf M und die eingeschränkte Differentialform $\omega|_M$ betrachtet.

Bemerkung 83.12. Ein Wegintegral wird folgendermaßen berechnet. Sei ω eine 1-Form auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, die durch

$$\omega = g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n$$

beschrieben werde, wobei die $g_j \colon G \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen sind. Es sei eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma \colon [a, b] \to G$ gegeben mit den (stetig differenzierbaren) Komponentenfunktionen γ_j. Die Ableitung in einem Punkt $t \in [a, b]$ wird dann nach Lemma 37.4 durch den Vektor $(\gamma_1'(t), , \ldots, , \gamma_n'(t))$ beschrieben. Die zurückgenommene Differentialform $\gamma^*\omega$ hat dann im Punkt t in Richtung 1 den Wert

$$\begin{aligned} \omega(\gamma(t); \gamma'(t)) &= (g_1(\gamma(t))dx_1 + \cdots + g_n(\gamma(t))dx_n) \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} \\ &= g_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + g_n(\gamma(t))\gamma_n'(t). \end{aligned}$$

Im mittleren Ausdruck wird eine Linearform auf einen Vektor angewendet. In $g_j(x_1, \ldots, x_n)$ wird also x_i durch $\gamma_i(t)$ und dx_i durch $\gamma_i'(t)dt$ ersetzt. Das Gesamtergebnis ist eine messbare 1-Form auf $[a, b]$ bzw. eine messbare Funktion von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$, die man integrieren kann.

Beispiel 83.13. Wir betrachten die Differentialform

$$\omega = \left(xy + z^2\right) dx + zdy + x^3 dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$ und den affin-linearen Weg

$$\gamma \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (1, 2, 0) + t(3, 0, 2) = (1 + 3t, 2, 2t).$$

Die unter γ zurückgenommene Differentialform $\gamma^*\omega$ ist

$$\begin{aligned} &\left(((1 + 3t)2 + (2t)^2)\, dx + 2tdy + (1 + 3t)^3 dz\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \left(3((1 + 3t)2 + (2t)^2) + 2(1 + 3t)^3\right) dt \\ &= \left(12t^2 + 18t + 6 + 54t^3 + 54t^2 + 18t + 2\right) dt \\ &= \left(54t^3 + 66t^2 + 36t + 8\right) dt. \end{aligned}$$

Für das Integral über dem Einheitsintervall ergibt sich

$$\int_0^1 54t^3 + 66t^2 + 36t + 8\, dt = \left(\frac{27}{2}t^4 + 22t^3 + 18t^2 + 8t\right)|_0^1 = \frac{123}{2}.$$