Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2014/2015

Analysis III

Vorlesung 82

Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Zu einer Mannigfaltigkeit M kann man zum Tangentialbündel TM (bzw. zum Kotangentialbündel T^*M) das k-te Dachprodukt $\bigwedge^k TM$ (bzw. $\bigwedge^k T^*M$) bilden. Es ist punktweise für $P \in M$ durch

$$\left(\bigwedge^k TM \right)_P = \bigwedge^k T_P M$$

definiert und es gibt wieder eine Projektionsabbildung

$$\bigwedge^k TM \longrightarrow M.$$

Zu einer Karte

$$\alpha \colon U \longrightarrow V,$$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$, und der zugehörigen Identifizierung

$$T\alpha \colon TU \longrightarrow TV = V \times \mathbb{R}^n$$

ergibt sich die Identifizierung

$$\bigwedge^k (T\alpha) \colon \bigwedge^k TU \longrightarrow \bigwedge^k TV = V \times \bigwedge^k \mathbb{R}^n.$$

Mit Hilfe dieser Abbildungen kann man auf $\bigwedge^k TM$ eine Topologie und auch eine Mannigfaltigkeitsstruktur definieren.

Definition 82.1. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine *k-Differentialform* (oder *k-Form* oder *Form vom Grad k*) ist ein Schnitt im k-fachen Dachprodukt des Kotangentialbündels, also eine Abbildung

$$\omega \colon M \longrightarrow \bigwedge^k T^*M,\, P \longmapsto \omega(P),$$

mit $\omega(P) \in \bigwedge^k T^*_P M$.

Wir bezeichnen die Menge der k-Formen auf M mit

$$\mathcal{E}^k (M)\,.$$

Bemerkung 82.2. Eine k-Form ordnet also jedem Punkt P der Mannigfaltigkeit ein Element aus $\bigwedge^k T_P^*M$ zu. Dies ist nach Korollar 80.2 und Satz 80.5 das gleiche wie eine alternierende multilineare Abbildung

$$T_PM \times \cdots \times T_PM \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Diese zugehörige Abbildung bezeichnen wir ebenfalls mit $\omega(P)$; für k Tangentialvektoren $v_1, \ldots, v_k \in T_PM$ ist also

$$\omega(P)(v_1, \ldots, v_k)$$

eine reelle Zahl. Dabei treten also zwei grundverschiedene Argumente auf, einerseits der Punkt der Mannigfaltigkeit und andererseits Elemente aus dem Tangentialraum an diesem Punkt. Die Abhängigkeit von den Tangentialvektoren ist verhältnismäßig einfach, da es sich ja um eine alternierende multilineare Abbildung handelt, dagegen ist die Abhängigkeit von der Mannigfaltigkeit beliebig kompliziert. Da die Dachprodukte des Kotangentialbündels nach Aufgabe 82.3 selbst Mannigfaltigkeiten sind, kann man sofort von stetigen oder (wenn M eine C^2-Mannigfaltigkeit ist) differenzierbaren Differentialformen sprechen.

Für $k = 0$ kommt der Kotangentialraum nur formal vor, eine 0-Form ist nichts anderes als eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$. Eine 1-Form (man spricht auch von einer *Pfaffschen Form*) ordnet jedem Punkt und jedem Tangentialvektor an P eine reelle Zahl zu. Für $k > n = \dim M$ ist das k-fache Dachprodukt der Nullraum und daher gibt es gar keine nichttrivialen Formen von diesem Grad. Besonders wichtig ist der Fall $k = n = \dim M$. Dann besitzt das n-te Dachprodukt den Rang 1 (d. h. die Dimension ist in jedem Punkt 1) und ein Schnitt darin wird lokal durch eine einzige Funktion beschrieben. Eine empfehlenswerte Vorstellung ist dabei, dass zu n Tangentialvektoren die Zahl $\omega(P)(v_1, \ldots, v_n)$ das („orientierte") Volumen des durch die Vektoren im Tangentialraum aufgespannten Paralleltops angibt. Diese Vorstellung ist auch bei kleineren k hilfreich, mit den $\omega(P)(v_1, \ldots, v_k)$ kann man das k-dimensionale Volumen des durch k Tangentialvektoren erzeugten Parallelotops berechnen. Diese Vorstellung wird präzisiert, wenn man über eine k-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit integriert.

Lemma 82.3. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und zu $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{E}^k(M)$ die Menge der k-Formen auf M. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die $\mathcal{E}^k(M)$ bilden mit den natürlichen Operationen versehen reelle Vektorräume.*
(2) *Zu einer Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ und einer Funktion*

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist auch $f\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, wobei $f\omega$ durch

$$(f\omega)(P) := f(P)\omega(P)$$

definiert ist.

(3) *Jede C^1-differenzierbare Funktion*

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert über die Tangentialabbildung Tf eine 1-Differentialform

$$df\colon M \longrightarrow T^*M,\ P \longmapsto T_P f,$$

wobei der Tangentialraum von $\mathbb{R}$ in $f(P)$ mit $\mathbb{R}$ identifiziert wird. Dies ergibt eine Abbildung

$$d\colon C^1(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{E}^1(M),\ f \longmapsto df.$$

(4) *Wenn $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge ist, so ist bei der Identifizierung $TM \cong M \times \mathbb{R}^m$ die Abbildung aus (3) gleich*

$$M \longrightarrow M \times (\mathbb{R}^m)^*,\ P \longmapsto (P, (Df)_P(-)).$$

(5) *Die Abbildung d aus (3) ist $\mathbb{R}$-linear.*

Beweis. (1) und (2) folgen unmittelbar aus einer punktweisen Betrachtung. (3). Für jeden Punkt $P \in M$ ist

$$T_P f\colon T_P M \longrightarrow T_{f(P)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

eine nach Lemma 77.10 (3) lineare Abbildung und somit ein Element in $T_P^* M$, das wir mit $(df)_P$ bezeichnen. Die Zuordnung $P \mapsto (df)_P$ ist daher eine Differentialform. (4) folgt aus Lemma 77.10 (1). (5). Die Abbildung in (3) ist für jeden Punkt $P \in M$ auf jeder offenen Umgebung festgelegt. Wir können daher annehmen, dass $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge ist, so dass die Aussage aus (4) und Proposition 45.3 folgt. □

Zu einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ hat man die Koordinatenfunktionen

$$x_j\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

zur Verfügung, die sich bei einer gegebenen Karte auf eine offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit übertragen. In jedem Punkt $Q \in V$ bilden die dx_j, $j = 1, \ldots, n$, eine Basis des Kotangentialraumes an Q. Dies ist einfach die Dualbasis der Standardbasis im umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$, den man auf ganz V als Tangentialraum nimmt. Zu einer k-elementigen Teilmenge

$$J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

setzt man

$$dx_J = dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}\,,$$

dies ist eine besonders einfache k-Form auf V. Für jeden Punkt $Q \in V$ ist

$$dx_J(Q) = (dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k})(Q) = dx_{j_1}(Q) \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}(Q) = e_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{j_k}^*.$$

Die Wirkungsweise von dieser Form auf $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \bigwedge^k T_Q V$ ist gegeben durch

$$\left(e_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{j_k}^*\right)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \det\left(e_{j_i}^*(v_\ell)\right)_{i\ell} = \det\left((v_\ell)_{j_i}\right)_{i\ell}.$$

Gemäß Satz 80.4 bilden die Auswertungen der Differentialformen (mit $j_1 < \ldots < j_k$)

$$dx_J \,=\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

für jeden Punkt Q eine Basis von $\bigwedge^k T_Q^*V$, und daher lässt sich jede auf V definierte k-Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$ eindeutig als

$$\omega \,=\, \sum_{J,\, \#(J)=k} f_J dx_J$$

schreiben mit eindeutig bestimmten Funktionen

$$f_J \colon V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Lemma 82.4. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge mit einer Karte*

$$\alpha \colon U \longrightarrow V$$

und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Es seien

$$x_j \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

die zugehörigen Koordinatenfunktionen, $1 \leq j \leq n$. Dann lässt sich jede auf U definierte k-Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^k(U)$ eindeutig schreiben als

$$\omega = \sum_{J,\, \#(J)=k} f_J dx_J$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen

$$f_J \colon U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 80.4. □

Korollar 82.5. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge mit einer Karte*

$$\alpha \colon U \longrightarrow V$$

und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Es seien

$$x_j \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

die zugehörigen Koordinatenfunktionen, $1 \leq j \leq n$. Es sei

$$f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gilt für die zugehörige 1-Differentialform df die Darstellung[1]

$$df \,=\, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

[1]Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ wurden in der Vorlesung 76 eingeführt.

Beweis. Wir können sofort annehmen, dass sich alles auf der offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abspielt. Für jeden Punkt $Q \in V$ gilt die folgende Gleichheit von Linearformen

$$\begin{aligned}(df)_Q &= (Df)_Q \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(Q), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(Q)\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(Q)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(Q)dx_n.\end{aligned}$$

□

Das Zurückziehen von Differentialformen

Definition 82.6. Es seien L und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei

$$\varphi\colon L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung. Es sei ω eine k-Differentialform auf M. Dann nennt man die k-Form auf L, die der durch

$$(P, v_1, \ldots, v_k) \longmapsto \omega(\varphi(P), T_P(\varphi)(v_1), \ldots, T_P(\varphi)(v_k))$$

gegebenen alternierenden Abbildung entspricht, die mit φ *zurückgezogene* k*-Form*. Sie wird mit

$$\varphi^*\omega$$

bezeichnet.

Lemma 82.7. *Es seien L und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten und*

$$\varphi\colon L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung. Dann erfüllt das Zurückziehen von Differentialformen folgende Eigenschaften.

(1) *Für eine Funktion $f \in \operatorname{Abb}(M, \mathbb{R}) = \mathcal{E}^0(M)$ ist $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.*
(2) *Die Abbildungen*

$$\varphi^*\colon \mathcal{E}^k(M) \longrightarrow \mathcal{E}^k(L),\, \omega \longmapsto \varphi^*\omega,$$

sind $\mathbb{R}$-linear.
(3) *Wenn $L \subseteq M$ eine offene Untermannigfaltigkeit ist, so ist das Zurückziehen einer Differentialform ω einfach die Einschränkung $\omega|_L$ auf diese Teilmenge.*
(4) *Es sei N eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit und*

$$\psi\colon M \longrightarrow N$$

eine weitere differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$(\psi \circ \varphi)^*(\omega) = \varphi^*(\psi^*(\omega))$$

für jede Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$.

Beweis. (1) folgt unmittelbar aus der Definition 82.6. (2). Wir müssen für Differentialformen ω_1 und ω_2 und Skalare $a, b \in \mathbb{R}$ zeigen, dass $\varphi^*(a\omega_1 + b\omega_2) = a\varphi^*\omega_1 + b\varphi^*\omega_2$ gilt. Eine solche Gleichheit von Differentialformen bedeutet, dass die Gleichheit in jedem Punkt $P \in L$ und für jedes k-Tupel von Tangentialvektoren $v_1, \ldots, v_k \in T_PL$ gilt. Daher folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned}(\varphi^*(a\omega_1 + b\omega_2))(P, v_1, \ldots, v_k) &= (a\omega_1 + b\omega_2)(\varphi(P), T_P(\varphi)(v_1), \ldots, T_P(\varphi)(v_k)) \\ &= a\omega_1(\varphi(P), T_P(\varphi)(v_1), \ldots, T_P(\varphi)(v_k)) \\ &\quad + b\omega_2(\varphi(P), T_P(\varphi)(v_1), \ldots, T_P(\varphi)(v_k)) \\ &= (a\varphi^*\omega_1)(P, v_1, \ldots, v_k) + (b\varphi^*\omega_2)(P, v_1, \ldots, v_k).\end{aligned}$$

(3) folgt unmittelbar aus der Definition. (4). Es sei $Q \in L$, $u_1, \ldots, u_k \in T_QL$ und ω eine k-Form auf N. Dann gilt unter Verwendung von Lemma 77.10 (4)

$$\begin{aligned}&((\psi \circ \varphi)^*(\omega))(Q, u_1, \ldots, u_k) \\ = \;& \omega((\psi \circ \varphi)(Q), T_Q(\psi \circ \varphi)(u_1), \ldots, T_Q(\psi \circ \varphi)(u_k)) \\ = \;& \omega\left(\psi(\varphi(Q)), \left(T_{\varphi(Q)}\psi\right)((T_Q\varphi)(u_1)), \ldots, \left(T_{\varphi(Q)}\psi\right)((T_Q\varphi)(u_k))\right) \\ = \;& (\psi^*(\omega))(\varphi(Q), T_Q(\varphi)(u_1), \ldots, T_Q(\varphi)(u_k)) \\ = \;& (\varphi^*(\psi^*(\omega)))(Q, u_1, \ldots, u_k),\end{aligned}$$

und dies ist die Behauptung. $\square$

Lemma 82.8. *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, deren Koordinaten mit $x_1, \ldots, x_n$ bzw. mit $y_1, \ldots, y_m$ bezeichnet seien. Es sei*

$$\varphi \colon U \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung und es sei ω eine k-Differentialform auf V mit der Darstellung

$$\omega = \sum_{I,\, \#(I)=k} f_I dy_I,$$

wobei $f_I \colon V \to \mathbb{R}$ Funktionen sind. Dann besitzt die zurückgezogene Form die Darstellung

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega &= \sum_{I,\, \#(I)=k} (f_I \circ \varphi) \left(\sum_{J,\, \#(J)=k} \det \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i \in I, j \in J} \right) dx_J \right) \\ &= \sum_{J,\, \#(J)=k} \left(\sum_{I,\, \#(I)=k} (f_I \circ \varphi) \det \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i \in I, j \in J} \right) \right) dx_J.\end{aligned}$$

Beweis. Die zweite Gleichung beruht auf einer einfachen Umordnung. Aufgrund von Lemma 82.7 (2) kann man sich auf den Fall $\omega = f_I dy_I$ beschränken. Wir setzen $f = f_I$ und dürfen $I = \{1, \ldots, k\}$ annehmen. Wir zeigen die Gleichheit der beiden k-Formen auf U, indem wir zeigen, dass sie für jeden

Punkt $P \in U$ und jedes Dachprodukt $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ den gleichen Wert liefern. Es ist einerseits

$$\begin{aligned}
& \varphi^*(f dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k)(P, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}) \\
= \ & (f dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k)(\varphi(P), T_P(\varphi)(e_{j_1}) \wedge \ldots \wedge T_P(\varphi)(e_{j_k})) \\
= \ & f(\varphi(P))(dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k)(\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_1}}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{j_1}}(P) \end{pmatrix} \wedge \ldots \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_k}}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{j_k}}(P) \end{pmatrix}) \\
= \ & f(\varphi(P)) \cdot \det \left((dy_i) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_\ell}}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{j_\ell}}(P) \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i, \ell \leq k} \\
= \ & f(\varphi(P)) \cdot \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{j_\ell}}(P) \right)_{1 \leq i, \ell \leq k} .
\end{aligned}$$

Wenn man andererseits die Summe auf $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}$ anwendet, so ist $dx_J(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}) = 0$ außer bei $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$, wo sich der Wert 1 ergibt, so dass sich also der gleiche Wert ergibt. $\square$

Korollar 82.9. *Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, deren Koordinaten mit $x_1, \ldots, x_n$ bzw. mit $y_1, \ldots, y_n$ bezeichnet seien. Es sei*

$$\varphi \colon U \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung und es sei ω eine n-Differentialform auf V mit der Darstellung

$$\omega = f dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n .$$

Dann besitzt die zurückgezogene Form die Darstellung

$$\varphi^* \omega = (f \circ \varphi) \cdot \det \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n .$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 82.8. $\square$

Die beschreibenden Funktionen zu einer Differentialform haben also das gleiche Transformationsverhalten wie die Dichten, die auf einer Karte ein kontinuierliches Maß auf einer Mannigfaltigkeit beschreiben.

Korollar 82.10. *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, deren Koordinaten mit $x_1, \ldots, x_n$ bzw. mit $y_1, \ldots, y_m$ bezeichnet seien. Es sei*

$$\varphi \colon U \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung mit φ_{i_0} konstant für ein $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ und es sei ω eine k-Differentialform auf V mit der Darstellung

$$\omega = f dy_I$$

mit $i_0 \in I$. Dann ist $\varphi^* \omega = 0$.

Beweis. Nach Lemma 82.8 gilt

$$\varphi^*\omega \;=\; \sum_{J,\,\#(J)=k} (f \circ \varphi) \cdot \det\left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i \in I, j \in J} \right) dx_J .$$

Da $\frac{\partial \varphi_{i_0}}{\partial x_j} = 0$ ist für alle $j \in J$, ist für jedes J eine Zeile der Matrix 0, so dass die Determinanten stets 0 sind. $\square$