Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Vorlesung 74

Die Transformationsformel für Integrale

Korollar 74.1. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante $(J(\varphi))(x) = \det (D\varphi)_x$ für $x \in G$. Es sei $Q \subseteq G$ ein kompakter achsenparalleler Quader. Dann gilt

$$\lambda^n(\varphi(Q)) = \int_Q |(J(\varphi))(x)| \, d\lambda^n.$$

Beweis. Da φ stetig differenzierbar ist, ist die Abbildung

$$G \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto j(x) = |(J(\varphi))(x)| = |\det (D\varphi)_x| \, ,$$

stetig und daher nach Satz 36.10 gleichmäßig stetig auf dem kompakten Quader Q. D.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $j(B(x, \delta)) \subseteq B(j(x), \epsilon)$ für alle $x \in Q$. Dann gibt es auch ein $\tilde{\delta} > 0$ derart, dass für alle kompakten Teilquader $K \subseteq Q$ mit maximaler Kantenlänge $\leq \tilde{\delta}$ das Bild $j(K)$ in einem abgeschlossenen Intervall der Länge 2ϵ liegt. Damit ist die Differenz zwischen dem Minimum und dem Maximum von $\{j(x) | \, x \in K\}$ maximal gleich 2ϵ.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir unterteilen Q in k^n kompakte Teilquader, indem wir jede Quaderkante in k gleichlange Teile unterteilen, und wählen dabei $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass die entstehenden k^n Teilquader die oben beschriebene Eigenschaft haben. Es sei I eine Indexmenge zu dieser Unterteilung, es ist also $Q = \bigcup_{i \in I} K_i$ und damit $\varphi(Q) = \bigcup_{i \in I} \varphi(K_i)$. Diese Vereinigung ist nicht disjunkt, jedoch sind die Schnittmengen als Bilder von Quaderseiten nach Lemma 66.11 und nach Korollar 73.6 Nullmengen. Wir wenden Lemma 73.7 auf die Teilquader K_i an und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) \cdot \min\, (j(x), x \in K_i) &\leq \lambda^n(\varphi(Q)) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda^n(\varphi(K_i)) \\ &\leq \sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) \cdot \max\, (j(x), x \in K_i).\end{aligned}$$

Dabei ist die Differenz zwischen links und rechts durch

$$\sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) 2\epsilon = 2\epsilon \lambda^n(Q)$$

beschränkt, kann also durch $\epsilon \to 0$ beliebig klein gemacht werden. Die gleichen Abschätzungen gelten wegen der Monotonie des Integrals auch für das Integral $\int_Q j(x)\, d\lambda^n(x)$, so dass

$$\lambda^n(\varphi(Q)) \; = \; \int_Q j(x)\, d\lambda^n(x)$$

gilt. $\square$

Satz 74.2. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante $(J(\varphi))(x) \; = \; \det (D\varphi)_x$ für $x \in G$. Es sei $S \subseteq G$ eine messbare Menge. Dann ist $\varphi(S)$ ebenfalls messbar und es gilt

$$\lambda^n(\varphi(S)) \; = \; \int_S |J(\varphi)| \; d\lambda^n .$$

Beweis. Ein Diffeomorphismus und seine Umkehrabbildung sind stetig, daher liegt eine Bijektion der messbaren Teilmengen von G und von H vor. Wir betrachten die beiden Zuordnungen

$$\mathcal{B}(G) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, S \longmapsto \int_S |J(\varphi)| \; d\lambda^n ,$$

also das Maß auf G mit der Dichte $|J(\varphi)|$, und

$$\mathcal{B}(G) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, S \longmapsto \lambda^n(\varphi(S)),$$

also das Bildmaß von λ^n unter der Umkehrabbildung φ^{-1}, und müssen zeigen, dass diese beiden Maße gleich sind. Nach Korollar 74.1 gilt die Gleichheit für alle kompakten Quader. Aufgrund von Aufgabe 69.2 bzw. Korollar 73.6 gilt die Gleichheit auch für alle offenen bzw. „nach oben halboffenen“ Quader, also Produkte von nach oben halboffenen Intervallen. Die Menge der endlichen disjunkten Vereinigungen von diesen zuletzt genannten Quadern bilden einen Mengen-Präring im $\mathbb{R}^n$. Diese Menge ist auch ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für das System der Borelmengen. Daher müssen nach Satz 63.7 die beiden Maße generell übereinstimmen. $\square$

Wir kommen zur *Transformationsformel für Integrale.*

Satz 74.3. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) \; = \; \det (D\varphi)_x$$

für $x \in G$. Es sei

$$f\colon\, H \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare Funktion. Dann ist f auf H genau dann integrierbar, wenn die Hintereinanderschaltung $f \circ \varphi$ auf G integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_H f \, d\lambda^n = \int_G (f \circ \varphi) \, |J(\varphi)| \, d\lambda^n .$$

Beweis. Die Zuordnung $S \mapsto \lambda^n(\varphi(S))$ für messbare Mengen $S \subseteq G$ ist ein Maß auf $\mathcal{B}(G)$ und zwar handelt es sich um das Bildmaß $\varphi_*^{-1}\lambda^n$ von λ^n unter der Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} \colon H \longrightarrow G .$$

Nach Satz 74.2 besitzt dieses Maß die Dichte $x \mapsto |(J(\varphi))(x)|$. Daher gilt nach Aufgabe 74.5 und der allgemeinen Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_G (f \circ \varphi) \cdot |J(\varphi)| \, d\lambda^n &= \int_G (f \circ \varphi) \, d(\varphi_*^{-1}\lambda^n) \\ &= \int_H (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda^n \\ &= \int_H f \, d\lambda^n . \end{aligned}$$

□

Beispiele zur Transformationsformel

Wenn bei einem Diffeomorphismus der Betrag der Jacobi-Determinante überall 1 ist, so ist er maßtreu. Es ist einfach, maßtreue, nichtlineare Abbildungen zu konstruieren.

Beispiel 74.4. Es sei $h \in \mathbb{R}[y]$ ein beliebiges Polynom in der einen Variablen y. Dann ist die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x,y) \longmapsto (x + h(y), y)$$

ein flächentreuer Diffeomorphismus. Die Jacobi-Matrix von φ ist ja

$$\operatorname{Jak}(\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & h'(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Jacobi-Determinante konstant gleich 1 ist. Wenn man die Rollen von x und y vertauscht und die Hintereinanderschaltung von solchen Abbildungen betrachtet, so erhält man flächentreue Abbildungen, denen man es nicht auf den ersten Blick ansieht. Beispielsweise ist zu $\varphi(x,y) = (x+y^2, y)$ und $\psi(x,y) = (x, y+x^3)$ die Hintereinanderschaltung

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(x,y) &= \psi(\varphi(x,y)) \\ &= \psi\left(x+y^2, \, y\right) \\ &= \left(x+y^2, \, y + \left(x+y^2\right)^3\right) \\ &= \left(x+y^2, \, y + x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6\right). \end{aligned}$$

Korollar 74.5. *Es sei*

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta\,, r\sin\theta\,),$$

die Polarkoordinatenauswertung und es seien G und H offene Mengen, auf denen φ einen Diffeomorphismus induziert. Es sei

$$f\colon\ H \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine integrierbare Funktion. Dann ist

$$\int_H f(x,y)\, d\lambda^2(x,y) \;=\; \int_G f(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,)\cdot r\, d\lambda^2(r,\theta).$$

Dies gilt auch dann, wenn außerhalb von Nullmengen ein Diffeomorphismus vorliegt. Insbesondere gilt bei stetigem f die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda^2(x,y) \;=\; \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,)\cdot r\, d\theta\, dr.$$

Beweis. Dies folgt wegen

$$\det\,(D\varphi)_{(r,\theta)} \;=\; \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \;=\; r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \;=\; r$$

direkt aus Satz 74.3. □

Lemma 74.6. *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Durch eine einfache Substitution ist die Aussage äquivalent zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;=\; 1.$$

Nennen wir dieses Integral I. Nach Korollar 73.2 ist

$$I^2 \;=\; \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, d\lambda^2.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$ ist dieses Integral nach Korollar 74.5 und nach einer erneuten Anwendung von Korollar 73.2 gleich

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]\times\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\, d\lambda^2(r,\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{[0,2\pi]} 1\, d\lambda^1(\theta)\right)\left(\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\, d\lambda^1(r)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\, d\lambda^1(r) \\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\, dr
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Damit ist auch $I = 1$. $\square$

Beispiel 74.7. Es soll eine Straße in der Ebene der Breite $2a$ asphaltiert werden. Dabei wird die Straße durch den Verlauf des Mittelstreifen vorgegeben, der durch die Kurve

$$[0, s] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto \psi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

bestimmt ist. Dabei sei ψ zweimal stetig differenzierbar und bogenparametrisiert, d.h. es sei $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$, was bedeutet, dass die Mittelstreifenkurve mit normierter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Die Breite ist dabei senkrecht zum Mittelstreifen zu messen. Die zu asphaltierende Trasse wird dann durch die Abbildung

$$\varphi\colon\ [0, s] \times [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (t, r) \longmapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -g'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Wir nehmen an, dass diese Parametrisierung injektiv ist, was erfüllt ist, wenn die Mittelstreifenabbildung ψ injektiv ist und die Straße nicht zu breit werden soll.

Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist

$$(D\varphi)_{(t,r)} = \begin{pmatrix} f'(t) - rg''(t) & -g'(t) \\ g'(t) + rf''(t) & f'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$
\begin{aligned}
&f'(t)f'(t) + g'(t)g'(t) - r\,(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \\
&\qquad = 1 - r\,(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)).
\end{aligned}
$$

Daher ist die Asphaltfläche nach der Transformationsformel gleich

$$\int_{[0,s]\times[-a,a]} |1 - r\,(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t))|\; d\lambda^2 .$$

Wenn wir weiter annehmen, dass

$$|g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)| \leq \frac{1}{a}$$

ist (was bedeutet, dass die Straßenbreite nicht allzu groß ist), so ist dieses Integral nach Korollar 73.2 geich

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,s]\times[-a,a]} 1 - r\left(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)\right)\, d\lambda^2 \\
= \;& 2as + \left(\int_{-a}^{a} r\, dr\right)\left(\int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)\, dt\right) \\
= \;& 2as + 0 \cdot \left(\int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)\, dt\right) \\
= \;& 2as.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Asphaltfläche gleich der Mittelstreifenlänge mal der Straßenbreite ist.

Abbildungsverzeichnis