Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 7

Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

Korollar 7.1. *Eine beschränkte und monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 6.8 liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in $\mathbb{R}$. ☐

Diese Aussage ist auch die Grundlage dafür, dass die Dezimalentwicklung stets eine (eindeutige) reelle Zahl definiert. Eine (unendliche) Dezimalentwicklung

$$a, a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots$$

mit $a \in \mathbb{N}$ (wir beschränken uns auf nichtnegative Zahlen) und $a_{-n} \in \{0, \ldots, 9\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich zu verstehen als die Folge der rationalen Zahlen

$$x_0 := a,\ x_1 := a + a_{-1} \cdot \frac{1}{10},\ x_2 := a + a_{-1} \cdot \frac{1}{10} + a_{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2, \text{ etc.}$$

Diese ist offenbar monoton wachsend. Wir werden in einer der nächsten Vorlesung sehen, dass sie nach oben beschränkt ist (beispielsweise durch $a+1$), so dass dadurch in der Tat eine reelle Zahl definiert wird.

Eine weitere Möglichkeit, reelle Zahlen zu beschreiben, wird durch Intervallschachtelungen gegeben.

Definition 7.2. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N},$$

in K heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

gegen 0 konvergiert.

Satz 7.3. *Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe 7.19. □

Genauer gilt, dass bei einer Intervallschachtelung sowohl die Folge der unteren Intervallgrenzen als auch die Folge der oberen Intervallgrenzen gegen ein und dieselbe Zahl konvergieren. Ebenso konvergiert jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in I_n$ gegen diesen Grenzwert, siehe Aufgabe 7.10.

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen sichert auch die Existenz einer eindeutig bestimmten Quadratwurzel für eine nichtnegative reelle Zahl.

Satz 7.4. *Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es eine eindeutige nichtnegative reelle Zahl x mit $x^2 = c$. Diese Zahl x heißt die* Quadratwurzel *von c und wird mit $\sqrt{c}$ bezeichnet.*

Beweis. Nach Aufgabe 5.1 kann es maximal zwei Zahlen geben, deren Quadrat gleich c ist, und diese Zahlen sind wegen

$$(-x)^2 \,=\, (-1)^2x^2 \,=\, x^2$$

negativ zueinander. Es kann also maximal nur eine nichtnegative Quadratwurzel geben. Die Existenz wird durch das babylonische Wurzelziehen gesichert, das eine Intervallschachtelung beschreibt. Nach Satz 7.3 legt eine Intervallschachtelung eine eindeutig bestimmte reelle Zahl fest. Nennen wir diese Zahl x. Wir müssen zeigen, dass diese Zahl in der Tat eine Quadratwurzel von c ist, dass also $x^2 = c$ ist. Bei $c = 0$ ist dies klar, wir nehmen also $c > 0$ an. Die Intervallgrenzen sind durch

$$x_{n+1} \,=\, \frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2}$$

und $\frac{c}{x_n}$ bestimmt und die Folge x_n konvergiert gegen x. Dies gilt auch für die „verschobene“ Folge x_{n+1}. Nach den Rechengesetzen für konvergente Folgen gilt somit

$$x \,=\, \frac{x + \frac{c}{x}}{2}.$$

Dies ergibt

$$x \,=\, \frac{c}{x}$$

und somit $x^2 \,=\, c$. □

Bei einer wachsenden, nach oben beschränkten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann man den Grenzwert auch auffassen als das Supremum der Menge $\{x_n |\, n \in \mathbb{N}\}$. Insofern ist die folgende Aussage eine weitreichende Verallgemeinerung von Korollar 7.1.

Satz 7.5. *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Es sei $x_0 \in M$ und y_0 eine obere Schranke für M, d.h. es ist $x \leq y_0$ für alle $x \in M$. Wir konstruieren zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_n \in M$ wachsend, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist und jedes y_n eine obere Schranke von M ist (so dass insbesondere $x_n \leq y_n$ für alle n ist), und so, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Dabei gehen wir induktiv vor, d.h. die beiden Folgen seien bis n bereits definiert und erfüllen die gewünschten Eigenschaften. Wir setzen

$$x_{n+1} := \begin{cases} x_n, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ \text{ein beliebiger Punkt aus } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

und

$$y_{n+1} := \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ y_n \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Dies erfüllt die gewünschten Eigenschaften, und es ist

$$y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (y_0 - x_0)\,,$$

da in beiden Fällen der Abstand zumindest halbiert wird. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert sie Korollar 7.1 sie gegen einen Grenzwert, sagen wir x. Ebenso ist die fallende Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt und konvergiert gegen denselben Grenzwert x. Wir behaupten, dass dieses x das Supremum von M ist. Wir zeigen zuerst, dass x eine obere Schranke von M ist. Sei dazu $z > x$ für ein $z \in M$ angenommen. Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es insbesondere ein n mit

$$x \leq y_n < z$$

im Widerspruch dazu, dass jedes y_n eine obere Schranke von M ist. Für die Supremumseigenschaft müssen wir zeigen, dass x kleiner oder gleich jeder oberen Schranke von M ist. Sei dazu u eine obere Schranke von M und nehmen wir an, dass $x > u$ ist. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es wieder ein n mit

$$u < x_n \leq x$$

im Widerspruch dazu, dass u eine obere Schranke ist. Also liegt wirklich das Supremum vor. □

Mit diesem Satz kann man einfach die Existenz von beliebigen Wurzeln nachweisen.

Beispiel 7.6. Es sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}$. Es sei

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \middle|\, x^k \leq a\right\}\,.$$

Diese Menge ist wegen $0 \in M$ nicht leer und nach oben beschränkt (bei $a \leq 1$ ist 1 eine obere Schranke, sonst ist a eine obere Schranke). Es sei $s = \sup(M)$, das es nach Satz 7.5 geben muss. Dann ist $s^k = a$, d.h. s ist eine k-te Wurzel von a, da sowohl die Annahme $s^k < a$ als auch die Annahme $s^k > a$ zu einem Widerspruch führt, siehe Aufgabe 7.15.

Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Karl Weierstraß (1815-1897)

Die folgende Aussage heißt *Satz von Bolzano-Weierstraß*.

Satz 7.7. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 := [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k]\,.$$

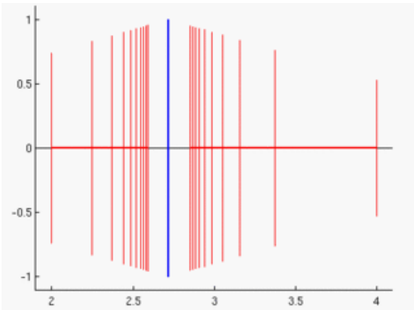
In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_k > n_{k-1}$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x. $\square$

Eine äquivalente Formulierung ist, dass jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ einen Häufungspunkt besitzt.

Die eulersche Zahl e



Wir besprechen eine Beschreibung der sogenannten *eulerschen Zahl e*.

Lemma 7.8. *Die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$, mit den Grenzen*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ und } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

definieren eine Intervallschachtelung.

Beweis. Wegen $1 + \frac{1}{n} > 1$ ist klar, dass

$$a_n < a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n$$

ist, so dass also wirklich Intervalle vorliegen. Um zu zeigen, dass die Intervalle ineinander liegen, zeigen wir, dass die unteren Grenzen wachsend und die oberen Grenzen fallend sind. Wir betrachten zuerst $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aufgrund der Bernoulli-Ungleichung gilt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Dies schreiben wir als

$$\frac{n-1}{n} \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Daraus ergibt sich durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ (es sei $n \geq 2$) die Abschätzung

$$a_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a_n.$$

Für die oberen Intervallgrenzen b_n ergibt die Bernoullische Ungleichung die Abschätzung

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} \geq 1+\frac{1}{n}.$$

Daraus folgt

$$1+\frac{1}{n} \leq \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ergibt sich

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = b_{n-1}.$$

Wir betrachten schließlich die Intervalllängen. Diese sind

$$b_n - a_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) - a_n = a_n\frac{1}{n} \leq \frac{b_1}{n}$$

und konvergieren somit gegen 0. Also liegt insgesamt eine Intervallschachtelung vor. $\square$

Leonhard Euler (1707-1783)

Durch diese Intervallschachtelung ist aufgrund von Satz 7.3 eindeutig eine reelle Zahl bestimmt.

Definition 7.9. Die reelle Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

heißt *eulersche Zahl*.

Ihr nummerischer Wert ist

$$e = 2,718281828459\ldots.$$

Wir werden bei der Behandlung der Exponentialfunktion auf die eulersche Zahl zurückkommen und einer andere Beschreibung dafür kennenlernen.

Abbildungsverzeichnis