Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Vorlesung 66

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel zusammen, um auf den Borel-Mengen des $\mathbb{R}^n$ ein Maß zu definieren, dass für einen Quader, dessen Seiten reelle Intervalle sind, einfach das Produkt der Seitenlängen ist. Dieses Maß heißt *Borel-Lebesgue-Maß*. Wir beginnen mit der eindimensionalen Situation.

Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

Das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.

Lemma 66.1. *Das Mengensystem aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche (disjunkte) Vereinigung von halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen, ist ein Mengen-Präring.*

Beweis. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich genau dann als eine endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen schreiben, wenn dies mit endlich vielen disjunkten halboffenen Teilmengen möglich ist, siehe Aufgabe 66.14. Die leere Menge ist das halboffene Interall $[a, a[$ (bzw. die leere Vereinigung). Die Abgeschlossenheit unter Vereinigungen ist klar. Sei $V = I_1 \cup \ldots \cup I_m$ und $W = J_1 \cup \ldots \cup J_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} V \setminus W &= (I_1 \cup \ldots \cup I_m) \setminus (J_1 \cup \ldots \cup J_n) \\ &= (I_1 \setminus (J_1 \cup \ldots \cup J_n)) \cup \ldots \cup (I_m \setminus (J_1 \cup \ldots \cup J_n)) \\ &= ((I_1 \setminus J_1) \setminus (J_2 \cup \ldots \cup J_n)) \cup \ldots \cup ((I_m \setminus J_1) \setminus (J_2 \cup \ldots \cup J_n)). \end{aligned}$$

Da $I_1 \setminus J_1$ eine Vereinigung von maximal zwei halboffenen Intervallen ist, folgt die Behauptung durch Induktion über n. □

LEMMA 66.2. *Es sei $\mathcal{V}$ der Mengen-Präring aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die zu $V \in \mathcal{V}$ über eine Zerlegung in disjunkte halboffene Intervalle*
$$V = [a_1, b_1[\uplus \ldots \uplus [a_n, b_n[$$
definierte Zahl
$$\mu(V) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$
ist wohldefiniert.

(2) *Durch die Zuordnung $V \mapsto \mu(V)$ wird ein Prämaß auf diesem Präring definiert.*

Beweis. Siehe Aufgabe 66.15. □

SATZ 66.3. *Es sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die σ-Algebra der Borel-Mengen auf $\mathbb{R}$. Dann gibt es genau ein σ-endliches Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, das für jedes halboffene Intervall $[a, b[$ den Wert $\lambda([a, b[) = b - a$ besitzt. Statt halboffene Intervalle kann man auch offene oder abgeschlossene Intervalle nehmen.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 66.2, aus Satz 63.7 und aus Satz 64.7. □

DEFINITION 66.4. Das eindeutig bestimmte Maß $\lambda^1 = \lambda$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, das für jedes halboffene Intervall $[a, b[$ den Wert $\lambda([a, b[) = b - a$ besitzt, heißt (eindimensionales) *Borel-Lebesgue-Maß.*

Das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

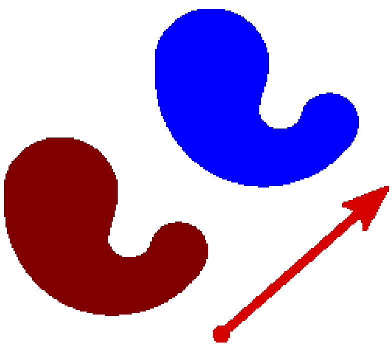
SATZ 66.5. *Der $\mathbb{R}^n$ sei mit der σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{B}^n$ versehen. Dann gibt es auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ genau ein σ-endliches Maß*
$$\lambda^n \colon \mathcal{B}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0},\, T \longmapsto \lambda^n(T),$$
das für alle Quader $Q = [a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[$ den Wert
$$\lambda^n(Q) \;=\; (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$
besitzt.

Beweis. Für $n = 1$ ist dies der Inhalt von Satz 66.3. Für $n \geq 2$ folgt dies aus Satz 65.4, angewendet auf das n-fache Produkt von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda^1)$ mit sich selbst. □

DEFINITION 66.6. Das eindeutig bestimmte Maß $\lambda = \lambda^n$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, das für jeden Quader der Form $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ den Wert $\lambda(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ besitzt, heißt *Borel-Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung 66.7. Das Borel-Lebesgue-Maß ordnet also jeder Borel-Menge eine reelle Zahl oder das Symbol ∞ zu. Die Quader bilden dabei die Grundkörper, denen auf eine besonders einfache Weise ein Maß zugeordnet wird, wodurch das gesamte Maß festgelegt wird. Für eine beliebige messbare Menge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ist dabei $\lambda(T)$ gegeben als das Infimum von $\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i)$ über alle abzählbaren Überpflasterungen von T mit Quadern (so war eben das äußere Maß definiert, mit dessen Hilfe wir den Fortsetzungssatz für Maße aufstellen konnten). Es gibt kein allgemeines Verfahren, für gegebene Mengen (beispielsweise Flächenstücke, Körper) ihr Maß (ihren Flächeninhalt, ihr Volumen) effektiv zu bestimmen. Eine wichtige Technik ist die Integration von Funktionen in einer und in mehreren Variablen.

Die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes



Für eine beliebige Teilmenge $T \subseteq V$ in einem Vektorraum V und einen Vektor $v \in V$ nennt man

$$T + v = \{x + v | \, x \in T\}$$

die um v *verschobene Menge*.

Definition 66.8. Ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ heißt *translationsinvariant*, wenn für alle messbaren Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\mu(T) = \mu(T + v)$$

gilt.

Satz 66.9. *Das Borel-Lebesgue-Maß λ^n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ist translationsinvariant.*

Beweis. Zu $v \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Translationsabbildung

$$\varphi_v \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \, P \longmapsto P + v.$$

Es sei $\mu := (\varphi_v)_* \lambda^n$ das Bildmaß unter der Translationsabbildung. Dieses ist wieder ein σ-endliches Maß. Für jeden Quader $Q = [a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[$ ist $Q' = Q + v$ wieder ein achsenparalleler Quader, wobei sich die Seitenlängen nicht ändern. Daher ist

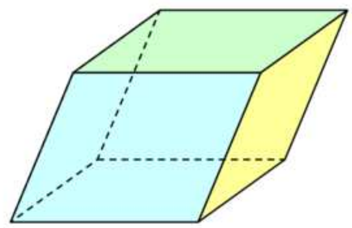
$$\mu(Q) = ((\varphi_v)_* \lambda^n)(Q) = \lambda^n(\varphi_v^{-1}(Q)) = \lambda^n(Q - v) = \lambda^n(Q') = \lambda^n(Q).$$

Das Maß μ stimmt also auf den Quadern mit λ^n überein und daher ist nach Satz 66.5 überhaupt

$$\mu = \lambda^n.$$

□

Die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes kann man auch so formulieren, dass jede Translation eine maßtreue Abbildung ist.



Definition 66.10. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und seien linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben. Dann nennt man

$$P = \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n | \, a_i \in [0, 1]\}$$

das von den v_i *erzeugte Parallelotop.*

Lemma 66.11. *Es sei μ ein translationsinvariantes Maß auf dem $\mathbb{R}^n$, das auf dem Einheitswürfel endlich sei. Eei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein echter Unterraum. Dann ist $\mu(U) = 0$.*

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $d < n$ und nehmen wir an, dass $\mu(U) > 0$ ist. Es sei $u_1, \ldots, u_d$ eine Basis von U und

$$P = \{a_1 u_1 + \cdots + a_d u_d | \, a_i \in [0, 1]\}$$

das davon erzeugte d-dimensionale Parallelotop.[1] Dies lässt sich durch endlich viele verschobene Einheitswürfel überpflastern und besitzt demnach ein endliches Maß. Die verschobenen Parallelotope

$$P_k = P + k_1 u_1 + \cdots + k_d u_d, \; k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$$

[1] Wenn man eine Orthonormalbasis wählt handelt es sich um einen Würfel.

besitzen wegen der Translationsinvarianz alle dasselbe Maß und bilden eine Überpflasterung von U. Da es abzählbar viele sind, muss $\mu(P) > 0$ gelten. Es sei nun $u_{d+1}, \ldots, u_n$ eine Ergänzung der Basis zu einer Basis von V, und sei

$$R = \{a_1u_1 + \cdots + a_du_d + \cdots + a_nu_n |\, a_i \in [0,1]\}$$

das zugehörige n-dimensionale Parallelotop. Für dieses ist $\mu(R) < \infty$. Wir betrachten nun die abzählbar unendlich vielen Parallelotope

$$P_q = P + qu_n \text{ mit } q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,.$$

Diese liegen alle innerhalb von R und besitzen wegen der Translationsinvarianz alle das gleiche Maß wie P. Ferner sind sie paarweise disjunkt, da andernfalls ein nichttriviales Vielfaches von u_n zu U gehören würde. Aus

$$\sum_{q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \mu(P_q) \;=\; \mu\left(\bigcup_{q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} P_q\right) \;\leq\; \mu(R)$$

folgt $\mu(R) = \infty$, ein Widerspruch. □

Allgemein nennt man Unterräume (und zwar nicht nur Untervektorräume, sondern auch affine Unterräume, also verschobene Untervektorräume) des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$ *Hyperebenen*. Insbesondere besitzen Hyperebenen das Maß 0.

SATZ 66.12. *Das Borel-Lebesgue-Maß λ^n ist das einzige translationsinvariante Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, das auf dem Einheitswürfel den Wert 1 besitzt.*

Beweis. Das Borel-Lebesgue-Maß λ^n erfüllt nach Satz 66.9 diese Bedingungen. Sei μ ein solches Maß. Nach Lemma 66.11 ist es egal, ob diese Bedingung an den abgeschlossenen, den offenen oder einen halboffenen Einheitswürfel gestellt wird. Wir werden durchgehend mit rechtsseitig offenen Quadern arbeiten. Da der $\mathbb{R}^n$ durch abzählbar viele Verschiebungen des Einheitswürfels überdeckt wird, die wegen der Translationsinvarianz von μ alle das gleiche Maß besitzen, ist μ σ-endlich. Wir müssen zeigen, dass μ mit λ^n übereinstimmt, wobei es aufgrund des Eindeutigkeitssatzes genügt, die Gleichheit auf einem durchnittsstabilen Erzeugendensystem für die Borelmengen nachzuweisen. Ein solches System bilden die Quader der Form $[a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[$ mit rationalen Ecken. Wegen der Translationsinvarianz von μ besitzt ein solcher Quader das gleiche Maß wie der verschobene Quader $[0, b_1 - a_1[\times \cdots \times [0, b_n - a_n[$. Wir schreiben einen solchen Quader unter Verwendung eines Hauptnenners als $Q = [0, \frac{c_1}{m}[\times \cdots \times [0, \frac{c_n}{m}[$ mit $m, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$. Dieser Quader setzt sich disjunkt aus $c_1 \cdots c_n$ Quadern (nämlich $[\frac{i_1}{m}, \frac{i_1+1}{m}[\times \cdots \times [\frac{i_n}{m}, \frac{i_n+1}{m}[$ mit $i_j \in \{0, \ldots, c_j - 1\}$) zusammen, die alle das gleiche μ-Maß haben, da sie ineinander verschoben werden können. Das μ-Maß des Quaders Q ist also das $c_1 \cdots c_n$-fache des μ-Maßes des Quaders $\tilde{Q} = [0, \frac{1}{m}[\times \cdots \times [0, \frac{1}{m}[$. Da sich der Einheitswürfel aus m^n verschobenen

Kopien dieses kleineren Würfels zusammensetzt, muss $\mu(\tilde{Q}) = \frac{1}{m^n}$ und damit

$$\mu(Q) \; = \; c_1 \cdots c_n \cdot \frac{1}{m^n} \; = \; \lambda^n(Q)$$

sein. □

Lemma 66.13. *Es sei ν ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, das auf dem Einheitswürfel ein endliches Maß habe. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\nu = c\lambda^n$.*

Beweis. Es sei $c = \nu(E)$, wobei E der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$ sei. Wenn $c = 0$ ist, so liegt das Nullmaß vor, da sich der $\mathbb{R}^n$ mit abzählbar vielen verschobenen Einheitswürfeln überdecken lässt, die wegen der Translationsinvarianz ebenfalls das Maß 0 haben. Dann hat der Gesamtraum das Maß 0 und damit hat jede messbare Teilmenge das Maß 0. Sei also $c \neq 0$. In diesem Fall betrachten wir das durch

$$\mu(T) := \frac{1}{c}\nu(T)$$

definierte (umskalierte) Maß. Dieses ist nach wie vor translationsinvariant und besitzt auf dem Einheitswürfel den Wert 1. Nach Satz 66.12 ist also $\mu = \lambda^n$ und somit ist $\nu = c\lambda^n$. □

Abbildungsverzeichnis