Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2014/2015

Analysis III

Vorlesung 64

Es ist eine naheliegende Idee, den Flächeninhalt einer beliebigen Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ als das Infimum über alle Summen von Rechtecksinhalten anzusetzen, die die Menge überdecken (oder überpflastern). So geht man auch beim Riemannschen Integral vor, wenn man Oberintegrale betrachtet. Mit diesem Ansatz kann man zwar jeder Teilmenge eine Zahl zuordnen, dies ist aber kein Maß. Wichtig sind vielmehr diejenigen Teilmengen, auf denen diese Festlegung zu einem Maß führt.

Fortsetzung von äußeren Maßen

Constantin Carathéodory (1873-1950). Auf ihn geht der Fortsetzungssatz für Maße zurück.

Definition 64.1. Es sei M eine Menge und $\mathcal{P}$ ein Präring auf M. Dann heißt eine Abbildung

$$\mu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0},\, T \longmapsto \mu(T),$$

ein *äußeres Maß* auf M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für je zwei Mengen $S, T \in \mathcal{P}$ mit $S \subseteq T$ gilt $\mu(S) \leq \mu(T)$.
(2) Für jede abzählbare Familie von paarweise disjunkten Teilmengen T_i, $i \in I$, aus $\mathcal{P}$, für die $\bigcup_{i \in I} T_i$ ebenfalls zu $\mathcal{P}$ gehört, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(T_i).$$

Die sogenannte *σ-Subadditivitätseigenschaft*, die für ein äußeres Maß für disjunkte Vereinigungen gefordert wird, gilt auch für beliebige abzählbare Vereinigungen, siehe Aufgabe 64.1.

Definition 64.2. Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}$ ein Präring auf M und

$$\mu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M. Für eine beliebige Teilmenge $T \subseteq M$ definiert man

$$\tilde{\mu}(T) := \inf \left(\sum_{i \in I} \mu(T_i),\, T \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i,\, T_i \in \mathcal{P},\, I \text{ abzählbar} \right)$$

und nennt dies die *Fortsetzung des äußeren Maßes μ*.

Bei dieser Definition nimmt man also das Infimum über alle Überpflasterungen.

Lemma 64.3. *Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}$ ein Präring auf M und*

$$\mu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M. Dann ist die Fortsetzung $\tilde{\mu}$ des äußeren Maßes μ ein äußeres Maß auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$, das auf $\mathcal{P}$ mit μ übereinstimmt.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{P}$. Das Mengensystem $\{T\}$ ist natürlich eine Überpflasterung von T, so dass $\mu(T)$ in der Menge vorkommt, über die das Infimum genommen wird. Für jede Überpflasterung T_i, $i \in I$, von T gilt $T = \bigcup_{i \in I} T \cap T_i$ und somit

$$\mu(T) \,\leq\, \sum_{i \in I} \mu(T \cap T_i) \,\leq\, \sum_{i \in I} \mu(T_i),$$

so dass $\mu(T) = \tilde{\mu}(T)$ gilt. Für beliebige Teilmengen $S \subseteq T$ gilt trivialerweise $\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(T)$, da eine Überpflasterung von T insbesondere eine Überpflasterung von S ist. Sei nun T_i, $i \in I$, eine abzählbare Familie von Teilmengen von M. Wir müssen $\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) \leq \sum_{i \in I} \tilde{\mu}(T_i)$ nachweisen. Wenn der rechte Ausdruck gleich ∞ ist, so ist nichts zu zeigen. Wir können also voraussetzen, dass die rechte Familie summierbar ist. Die Summanden dieser Familie sind jeweils das Infimum über Summen, die jeweils zu Überpflasterungen gehören. Nehmen wir an, dass die linke Seite größer als die rechte Seite sei, wobei die Differenz größer als $\epsilon > 0$ sei. Sei $\epsilon_i > 0$, $i \in I$, so gewählt, dass $\sum_{i \in I} \epsilon_i \leq \epsilon$ ist; eine solche Familie gibt es aufgrund der Abzählbarkeit von I, siehe Aufgabe 64.2. Zu jedem $i \in I$ gibt es eine Überpflasterung $T_i \subseteq \bigcup_{j \in J_i} T_{ij}$ mit einer abzählbaren Indexmenge J_i, mit $T_{ij} \in \mathcal{P}$ und mit

$$\tilde{\mu}(T_i) \,\leq\, \sum_{j \in J_i} \mu(T_{ij}) \,\leq\, \tilde{\mu}(T_i) + \epsilon_i.$$

Die Menge $L = \bigcup_{i \in I} J_i$ ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar. Wir betrachten nun die durch T_ℓ, $\ell \in L$, (mit $\ell = (i,j)$)

gegebene Überpflasterung von $\bigcup_{i\in I} T_i$. Damit gelten unter Verwendung des großen Umordnungssatzes die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i\in I} T_i\right) &\leq \sum_{\ell\in L} \mu\left(T_\ell\right) \\ &= \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J_i} \mu\left(T_{ij}\right)\right) \\ &\leq \sum_{i\in I}\left(\tilde{\mu}(T_i)+\epsilon_i\right) \\ &= \sum_{i\in I}\tilde{\mu}(T_i)+\sum_{i\in I}\epsilon_i \\ &\leq \sum_{i\in I}\tilde{\mu}(T_i)+\epsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Es ist keineswegs so, dass die Fortsetzung eines Prämaßes auf der Potenzmenge ein Maß liefert. Dies gilt allerdings auf der erzeugten σ-Algebra, was wir im Folgenden nach einigen Vorbereitungen beweisen werden. Zunächst führen wir den folgenden technischen Hilfsbegriff ein.

Definition 64.4. Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}$ ein Präring auf M,

$$\mu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Man sagt, dass eine Teilmenge $Z \subseteq M$ die *Zerlegungseigenschaft* besitzt, wenn für alle $S \subseteq M$ die Gleichheit $\tilde{\mu}(S) = \tilde{\mu}(S\cap Z)+\tilde{\mu}(S\cap(M\setminus Z))$ gilt.

Eine Teilmenge Z besitzt also die Zerlegungseigenschaft, wenn man für jede Menge S die Berechnung ihres äußeren Maßes auf die durch Z gegebene Zerlegung von S zurückführen kann. Die schwächere Eigenschaft $\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S\cap Z)+\tilde{\mu}(S\cap(M\setminus Z))$ gilt für jede Teilmenge $Z \subseteq M$, siehe Aufgabe 64.3.

Lemma 64.5. *Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}$ ein Präring auf M,*

$$\mu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Das Mengensystem aller Teilmengen $Z \subseteq M$, die die Zerlegungseigenschaft besitzen, bilden eine σ-Algebra.*
(2) *Die Einschränkung von $\tilde{\mu}$ auf diese σ-Algebra ist ein Maß.*

Beweis. (1). Sei

$$\mathcal{Z} = \{Z \subseteq M \mid Z \text{ besitzt die Zerlegungseigenschaft}\}.$$

Offensichtlich gehört M zu $\mathcal{Z}$ und dieses System ist abgeschlossen unter Komplementbildung. Bevor wir zeigen können, dass $\mathcal{Z}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, zeigen wir, dass dies für endliche Vereinigungen gilt. Seien also Z_1 und Z_2 aus $\mathcal{Z}$ und sei $S \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(S) &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z_1)) \\
&= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z_1) \cap Z_2) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z_1) \cap (M \setminus Z_2)) \\
&= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_2 \setminus Z_1)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup Z_2))) \\
&= \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup Z_2) \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup Z_2) \cap (M \setminus Z_1)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup Z_2))) \\
&= \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup Z_2)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup Z_2))).
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{Z}$ auch unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen und somit liegt insgesamt eine Mengen-Algebra vor. Sei nun Z_n, $n \in \mathbb{N}_+$, eine abzählbare Familie. Wir wissen, dass die Teilmengen $Z_n \setminus (Z_1 \cup \ldots \cup Z_{n-1})$ zu $\mathcal{Z}$ gehören. Deren Vereinigung ist gleich der Vereinigung der Z_n, so dass wir annehmen können, dass die Z_n paarweise disjunkt sind. Wegen der Disjunktheit ergibt sich induktiv für eine beliebige Teilmenge $S \subseteq M$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup \ldots \cup Z_n)) &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_2 \cup \ldots \cup Z_n)) \\
&= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap Z_2) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_3 \cup \ldots \cup Z_n)) \\
&= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap Z_2) + \cdots + \tilde{\mu}(S \cap Z_n).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unter Verwendung der Zerlegungseigenschaft von $Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$ und der Monotonie des äußeren Maßes die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(S) &= \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup \ldots \cup Z_n)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup \ldots \cup Z_n))) \\
&\geq \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap Z_2) + \cdots + \tilde{\mu}(S \cap Z_n) + \tilde{\mu}\left(S \cap \left(M \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Da dies für alle n gilt, und da ein äußeres Maß vorliegt, folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(S) &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}_+} \tilde{\mu}(S \cap Z_n) + \tilde{\mu}\left(S \cap \left(M \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} Z_n\right)\right)\right) \\
&\geq \tilde{\mu}(S \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} Z_n) + \tilde{\mu}\left(S \cap \left(M \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} Z_n\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Da die umgekehrte Abschätzung sowieso gilt, haben wir die gewünschte Gleichheit. (2). Für paarweise disjunkte Mengen Z_n, $n \in \mathbb{N}$, aus $\mathcal{Z}$ ist, wie unter (1) bewiesen,

$$\tilde{\mu}(Z_1) + \cdots + \tilde{\mu}(Z_n) = \tilde{\mu}(Z_1 \cup \ldots \cup Z_n) \leq \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n\right).$$

Da dies für alle n gilt, folgt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(Z_n) \leq \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n\right).$$

Da auch die umgekehrte Abschätzung gilt, liegt Gleichheit vor. $\square$

Lemma 64.6. *Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}$ ein Präring auf M,*

$$\mu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Dann besitzen alle Mengen aus $\mathcal{P}$ die Zerlegungseigenschaft.

Beweis. Es sei $Z \in \mathcal{P}$ und $S \subseteq M$. Es sei S_i, $i \in I$, eine abzählbare Überpflasterung von S mit Mengen aus $\mathcal{P}$. Die Durchschnitte $S_i \cap Z$, $i \in I$, bzw. $S_i \cap (M \setminus Z)$, $i \in I$, sind Überpflasterungen von Z bzw. von $M \setminus Z$. Für jedes S_i gilt $\mu(S_i) = \mu(S_i \cap Z) + \mu(S_i \cap (M \setminus Z))$, a ein Prämaß vorliegt. Daher ist

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \mu(S_i) &= \sum_{i \in I} \mu(S_i \cap Z) + \sum_{i \in I} \mu(S_i \cap (M \setminus Z)) \\ &\geq \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z)). \end{aligned}$$

Da dies für alle Überpflasterungen gilt, folgt

$$\tilde{\mu}(S) \geq \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z)).$$

Da auch die umgekehrte Abschätzung gilt, liegt Gleichheit vor. $\square$

Existenzsätze für Maße

Satz 64.7. *Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}$ ein Präring auf M,*

$$\mu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die von $\mathcal{P}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}$. Dann ist $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Wenn μ σ-endlich ist, so ist $\tilde{\mu}$ die einzige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\mathcal{A}$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 64.5 und Lemma 64.6. Der Zusatz ergibt sich aus Satz 63.7. $\square$

Produkt-Messräume

In den nächsten Vorlesungen wollen wir Produkte von Maßräumen definieren und insbesondere auf dem $\mathbb{R}^n$ ein Maß definieren.

Definition 64.8. Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (M_n, \mathcal{A}_n)$ Mengen mit darauf erklärten σ-Algebren. Dann nennt man die von allen Quadern

$$S_1 \times \cdots \times S_n \text{ mit } S_i \in \mathcal{A}_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

auf $M_1 \times \cdots \times M_n$ erzeugte σ-Algebra die *Produkt-σ-Algebra* der $(M_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Sie wird mit $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ bezeichnet.

Lemma 64.9. *Es seien* $(M, \mathcal{A})$ *und* $(N, \mathcal{B})$ *Messräume und es sei* $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ *die Produktmenge mit der Produkt-*σ*-Algebra. Dann sind die Projektionen*

$$p_1 : M \times N \longrightarrow M \text{ und } p_2 : M \times N \longrightarrow N$$

messbar.

Beweis. Dies folgt direkt daraus, dass zu einer messbaren Teilmenge $T \subseteq N$ die Urbildmenge

$$p_2^{-1}(T) = M \times T$$

ein Quader ist und daher nach Definition zu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gehört. □

Diese Aussage gilt natürlich auch für beliebige endliche Produkte. Man kann den Beweis von solchen Aussagen sehr häufig durch eine einfache Induktion auf den Fall von zwei Faktoren zurückführen, so dass wir uns zumeist auf diesen Fall beschränken werden.

Lemma 64.10. *Es seien* $(M, \mathcal{A})$ *und* $(N, \mathcal{B})$ *zwei Messräume und* $T \subseteq M \times N$ *eine messbare Teilmenge des Produktes* $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$*. Dann sind für jedes* $x \in M$ *und jedes* $y \in N$ *die Mengen*

$$T(x) = \{y \in N | (x, y) \in T\} \text{ und } T(y) = \{x \in M | (x, y) \in T\}$$

messbar in M *bzw. in* N*.*

Beweis. Wir zeigen, dass für jedes $y \in N$ die Inklusionsabbildung

$$\iota_y \colon M \longrightarrow M \times N, \, x \longmapsto (x, y),$$

messbar ist. Dazu genügt es nach Lemma 61.15, die Urbilder von messbaren Mengen der Form $A \times B \subseteq M \times N$ zu betrachten. Für eine solche Menge gilt

$$\iota_y^{-1}(A \times B) = \{x \in M | (x, y) \in A \times B\},$$

und dies ist leer, falls $y \notin B$ und gleich A, falls $y \in B$. So oder so ist sie also eine messbare Teilmenge. Für eine beliebige Teilmenge $T \subseteq M \times N$ ist daher

$$T(y) = \{x \in M | (x, y) \in T\} = \iota_y^{-1}(T)$$

messbar. □

Lemma 64.11. *Es seien* M, N_1, N_2 *Messräume und es seien* $f_1 \colon M \to N_1$ *und* $f_2 \colon M \to N_2$ *messbare Abbildungen. Dann ist auch die Abbildung*

$$(f_1, f_2) \colon M \longrightarrow N_1 \times N_2, \, x \longmapsto (f_1(x), f_2(x)),$$

messbar.

Beweis. Siehe Aufgabe 64.5. □

Abbildungsverzeichnis