Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Vorlesung 58

Wegintegrale und Gradientenfelder

LEMMA 58.1. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und*

$$h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld $G = \operatorname{Grad} h$. Es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg in U. Dann gilt für das Wegintegral

$$\int_\gamma G = h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)).$$

D.h. das Wegintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.[1]

Beweis. Aufgrund der Kettenregel ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma G &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \\
&= \int_a^b \sum_{i=1}^n G_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt \\
&= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt \\
&= \int_a^b (h \circ \gamma)'(t) dt \\
&= h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

□

KOROLLAR 58.2. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und*

$$h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld $G = \operatorname{Grad} h$. Es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dann ist

$$\int_\gamma G = 0.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 58.1. □

[1] In einem Potentialfeld ist also die geleistete Arbeit gleich der Potentialdifferenz von Start- und Endpunkt.

Satz 58.3. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene zusammenhängende Teilmenge und*

$$G\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

(1) *G ist ein Gradientenfeld.*
(2) *Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$ hängt das Wegintegral $\int_\gamma G$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ ab.*

Beweis. Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus Lemma 58.1. Sei umgekehrt die Eigenschaft (2) erfüllt. Wir geben eine auf U definierte Funktion h an, die differenzierbar ist und deren Gradientenfeld gleich dem vorgegebenen Vektorfeld ist. Dazu sei ein Punkt $P \in U$ fixiert. Für jeden Punkt $Q \in U$ gibt es einen stetig differenzierbaren Weg[2]

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$$

mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$. Wir setzen

$$h(Q) := \int_\gamma G.$$

Aufgrund der vorausgesetzten Wegunabhängigkeit des Integrals ist $h(Q)$ wohldefiniert. Wir müssen zeigen, dass diese so definierte Funktion in jedem Punkt $Q \in U$ und in jede Richtung $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und die Richtungsableitung mit $\langle G(Q), v\rangle$ übereinstimmt. Dazu betrachten wir

$$h(Q+tv) - h(Q) = \int_\delta G = \int_0^t \sum_{i=1}^n G_i(Q+sv) \cdot v_i ds,$$

wobei δ der verbindende lineare Weg von Q nach $Q+tv$ sei (und t hinreichend klein sei, sodass $Q+tv \in U$ ist). Für den Differentialquotienten ist

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{h(Q+tv)-h(Q)}{t} &= \sum_{i=1}^n \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t G_i(Q+sv)\cdot v_i ds \\ &= \sum_{i=1}^n G_i(Q)\cdot v_i \\ &= \langle G(Q), v\rangle . \end{aligned}$$

□

[2] Aus der Existenz eines verbindenden stetigen Weges folgt die Existenz eines verbindenden stetig differenzierbaren Weges. Man könnte also auch diese Eigenschaft als Definition für zusammenhängend nehmen.

Die Integrabilitätsbedingung

Wie kann man erkennen, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Eine notwendige Bedingung schlägt sich in der folgenden Definition nieder.

Definition 58.4. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und

$$G\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein differenzierbares Vektorfeld. Man sagt, dass G die *Integrabilitätsbedingung* erfüllt (oder *lokal integrabel* ist), wenn

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(P) = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(P)$$

für alle $P \in U$ und alle i, j gilt.

Lemma 58.5. *Das Gradientenfeld einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion erfüllt die Integrabilitätsbedingung.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 44.8. □

Beispiel 58.6. Das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (-y, x),$$

erfüllt wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

nicht die Integrabilitätsbedingung. Es kann also nach Lemma 58.5 kein Gradientenfeld sein.

Definition 58.7. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich eines Punktes $P \in T$, wenn für jeden Punkt $Q \in T$ die Verbindungsstrecke $sQ + (1-s)P$, $s \in [0, 1]$, ganz in T liegt.

Satz 58.8. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine sternförmige offene Teilmenge und*

$$G\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

(1) *G ist ein Gradientenfeld.*
(2) *G erfüllt die Integrabilitätsbedingung.*
(3) *Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon [a, b] \to U$ hängt das Wegintegral $\int_\gamma G$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ ab.*

Beweis. Die Äquivalenz (1) $\Longleftrightarrow$ (3) folgt aus Satz 58.3 und die Implikation (1) $\Longrightarrow$ (2) aus Lemma 58.5. Es bleibt also (2) $\Longrightarrow$ (1) zu zeigen, wobei wir explizit eine Stammfunktion h zum Vektorfeld G angeben. Es sei $P \in U$ ein

Punkt derart, dass U bezüglich P sternförmig ist. Wir definieren $h(Q)$ über das Wegintegral zu G zum linearen Verbindungsweg

$$\gamma\colon\ [0,1] \longrightarrow U,\ t \longmapsto P + t(Q-P),$$

also

$$h(Q) := \int_\gamma G = \int_0^1 \langle G(\gamma(t)), Q-P \rangle \, dt.$$

Wir müssen zeigen, dass der Gradient zu h gleich G ist, d.h. es ist $\frac{\partial h}{\partial x_i} = G_i$ zu zeigen. Dafür können wir $P = 0$ annehmen und wir schreiben v statt Q. Mit diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} h(v) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^1 \langle G(tv), v\rangle \, dt\right) \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \langle G(tv), v\rangle\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n G_j(tv)\cdot v_j\right)\right) dt \\
&= \int_0^1 t\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_i} G_j(tv) + G_i(tv) dt \\
&= \int_0^1 t\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j} G_i(tv) + G_i(tv) dt \\
&= \int_0^1 (t \mapsto t\cdot G_i(tv))' \, dt \\
&= G_i(v).
\end{aligned}$$

Dabei beruht die zweite Gleichung auf der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation (das haben wir nicht bewiesen), die vierte Gleichung auf Aufgabe 45.15, die fünfte Gleichung auf der Integrabilitätsbedingung, die sechste Gleichung auf der Kettenregel und der Produktregel und die siebte Gleichung auf der Newton-Leibniz-Formel. □

Beispiel 58.9. Wir betrachten das Vektorfeld

$$G\colon\ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x).$$

Wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

erfüllt dieses Vektorfeld die Integrabilitätsbedingung. Es handelt sich aber nicht um ein Gradientenfeld, da das Wegintegral zum Einheitskreis nicht 0 ist im Gegensatz zu Korollar 58.2.