Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Vorlesung 52

Diffeomorphismen

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 52.1. Es seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume und $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ offene Teilmengen. Eine Abbildung

$$\varphi\colon U_1 \longrightarrow U_2$$

heißt C^k-*Diffeomorphismus*, wenn φ bijektiv und k-mal stetig differenzierbar ist, und wenn die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}\colon U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit besagt also, dass eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarem totalen Differential lokal (!) ein C^1-Diffeomorphismus ist (es gibt auch C^k-Versionen von diesem Satz). Zwei offene Mengen U_1 und U_2 heißen C^k-*diffeomorph*, wenn es einen C^k-Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt. In dieser Vorlesung werden wir uns auf C^1-Diffeomorphismen beschränken.

Der Rang einer linearen Abbildung

$$L\colon V \longrightarrow W$$

ist definiert als die Dimension des Bildraumes $L(V)$. Mit diesem Begriff können wir die Regularität einer Abbildung in einem Punkt allgemein definieren.

Definition 52.2. Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, sei $P \in G$ und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow W$$

eine in P differenzierbare Abbildung. Dann heißt P ein *regulärer Punkt* von φ, wenn

$$\operatorname{rang}\,(D\varphi)_P \;=\; \min\,(\dim\,(V)\,,\dim\,(W))$$

ist. Andernfalls heißt P ein *kritischer Punkt* oder ein *singulärer Punkt*.

Bemerkung 52.3. Eine differenzierbare Abbildung $\varphi\colon G \to W$ ist genau dann regulär in einem Punkt $P \in G$, wenn das totale Differential $(D\varphi)_P$ den maximal möglichen Rang besitzt. Der Rang ist nach Satz Anhang.5 und nach Satz Anhang.7 gleich dem Spalten- bzw. Zeilenrang einer beschreibenden Matrix. Daher ist der Rang maximal gleich der Anzahl der Zeilen und maximal gleich der Anzahl der Spalten, also maximal gleich dem Minimum der beiden Dimensionen.

Bei $\dim(W) = 1$ ist P ein regulärer Punkt genau dann, wenn $(D\varphi)_P$ nicht die Nullabbildung ist. Daher stimmt diese Definition von regulär mit Definition 48.2 überein. Bei $\dim(V) = 1$ bedeutet die Regularität wiederum, dass $(D\varphi)_P \neq 0$ ist. Generell bedeutet bei $\dim(V) \leq \dim(W)$ die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ injektiv ist, und bei $\dim(V) \geq \dim(W)$ bedeutet die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ surjektiv ist. Insbesondere bedeutet bei $\dim(V) = \dim(W)$ die Regularität in P, dass das totale Differential bijektiv ist und dass daher die Voraussetzung im Satz über die lokale Umkehrbarkeit erfüllt ist.

Beispiel 52.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^2 - y, x + xy).$$

Diese Abbildung ist differenzierbar und die Jacobi-Matrix in einem Punkt $P = (x, y)$ ist

$$\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1+y & x \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$2x^2 + 1 + y\,,$$

so dass die Bedingung

$$y \neq -2x^2 - 1$$

die regulären Punkte der Abbildung charakterisiert. Im Nullpunkt $(0, 0)$ liegt beispielsweise ein regulärer Punkt vor, so dass dort aufgrund des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit lokal eine Bijektion vorliegt, d.h. es gibt offene Umgebungen U_1 und U_2 von $(0, 0)$ derart, dass die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1}\colon U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist (mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung).

Wie groß kann dabei U_1 gewählt werden? Wir beschränken uns auf offene Ballumgebungen $U(0, r)$. Bei $r > 1$ enthält eine solche Kreisscheibe zwei Punkte der Art

$$(\pm x, -1)\,.$$

Diese werden unter φ auf

$$\varphi(\pm x, -1) \,=\, (x^2 - (-1), x + x(-1)) \,=\, (x^2 + 1, 0)$$

abgebildet, also auf den gleichen Punkt. Daher ist die Einschränkung der Abbildung auf eine solche Kreisscheibe nicht injektiv, und auf einer solchen Menge kann es keine Umkehrabbildung geben.

Betrachten wir hingegen $U_1 = U(0, r)$ mit $r \leq 1$ und $U_2 := \varphi(U_1)$. Da U_1 keine kritischen Punkte enthält, ist nach Aufgabe 51.14 das Bild U_2 offen. Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{U_1}\colon U_1 \to U_2$ ist nach Definition von U_2 surjektiv, so dass nur die Injektivität zu untersuchen ist.

Das Gleichungssystem

$$x^2 - y = u \text{ und } x + xy = v$$

führt auf

$$y = x^2 - u$$

und auf

$$x(1 + x^2 - u) \;=\; x^3 + (1-u)x \;=\; v.$$

Seien (x, y) und $(\tilde{x}, \tilde{y})$ aus $U((0,0), 1)$ mit

$$\varphi(x, y) \;=\; \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

gegeben. Dann ist

$$x^3 + (1-u)x \;=\; v \;=\; \tilde{x}^3 + (1-u)\tilde{x}$$

und somit

$$0 \;=\; x^3 - \tilde{x}^3 + (1-u)(x - \tilde{x}) \;=\; (x - \tilde{x})\left(x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u\right).$$

Bei $x \neq \tilde{x}$ muss also

$$x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u \;=\; 0$$

sein. Dies bedeutet $y \;=\; x^2 - u \;=\; -x\tilde{x} - \tilde{x}^2 - 1$ und ebenso $\tilde{y} \;=\; -x\tilde{x} - x^2 - 1$. Wegen

$$x(y+1) \;=\; v$$

und $y + 1 > 0$ müssen x und v das gleiche Vorzeichen besitzen. Daher müssen auch x und $\tilde{x}$ das gleiche Vorzeichen besitzen. Daraus folgt aber

$$y \;=\; -x\tilde{x} - \tilde{x}^2 - 1 \;\leq\; -1,$$

so dass es in der offenen Kreisumgebung mit Radius 1 keine zwei verschiedenen Urbilder geben kann.[1]

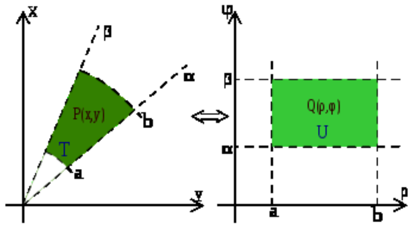
Wir haben schon für die komplexen Zahlen Polarkoordinaten verwendet, siehe Satz 21.6. Hier besprechen wir Polarkoordinaten in Hinblick auf lokale Umkehrbarkeit.

---

[1] Man kann auch folgendermaßen argumentieren: Die Ableitung von $x^3 + (1-u)x$ nach x ist $3x^2 + (1-u) \;=\; 3x^2 + 1 - (x^2 - y) \;=\; 2x^2 + 1 + y$. Wegen $|y| < 1$ ist dies positiv. Somit ist $x^3 + (1-u)x$ streng wachsend in x nach Satz 19.5. Daher gibt es zu einem vorgegebenen Punkt $(u, v) \in U_2$ nur ein x, das die Bedingung

$$x^3 + (1-u)x = v$$

erfüllt. Wegen $y = x^2 - u$ ist auch die zweite Komponente y eindeutig bestimmt.



Beispiel 52.5. Die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (r,\alpha) \longmapsto (r\,\cos\,\alpha\,, r\,\sin\,\alpha\,),$$

heißt *Polarkoordinatenauswertung*. Sie ordnet einem Radius r und einem Winkel α (wegen diesen Bedeutungen schränkt man den Definitionsbereich häufig ein) denjenigen Punkt der Ebene (in kartesischen Koordinaten) zu, zu dem man gelangt, wenn man in Richtung des Winkels (gemessen von der x-Achse aus gegen den Uhrzeigersinn) die Strecke r zurücklegt. Sie ist in jedem Punkt (r,α) stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\,\alpha & -r\,\sin\,\alpha \\ \sin\,\alpha & r\,\cos\,\alpha \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv, da die Abbildung im zweiten Argument, also im Winkel α, periodisch mit der Periode 2π ist. Bei $r=0$ ist - unabhängig von α - das Bild gleich $(0,0)$. Ferner ist $\varphi(-r,\alpha+\pi)=\varphi(r,\alpha)$. Die Abbildung kann also nicht global invertierbar sein.

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist

$$r(\,\cos^2\,\alpha\,+\,\sin^2\,\alpha\,)=r\,.$$

Bei $r\neq 0$ liegt also nach Satz Anhang.8 ein bijektives totales Differential vor. Nach dem Satz über die lokale Umkehrabbildung gibt es zu jedem Punkt (r,α) mit $r\neq 0$ eine offene Umgebung $(r,\alpha)\in U_1$ und eine bijektive Abbildung

$$\varphi|_{U_1}\colon\ U_1 \longrightarrow U_2=\varphi(U_1).$$

Bei $r>0$ kann man beispielsweise als offene Umgebung das offene Rechteck

$$U_1=]r-\delta,r+\delta[\,\times\,]\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon[$$

mit $r>\delta>0$ und mit $\pi>\epsilon>0$ wählen. Das Bild davon, also U_2, ist der Schnitt des (offenen) Kreisringes zu den Radien $r-\delta$ und $r+\delta$ und dem (offenen) Kreissektor, der durch die beiden Winkel $\alpha-\epsilon$ und $\alpha+\epsilon$ begrenzt ist.

Man kann diese Abbildung zu einer bijektiven Abbildung, und zwar zu einem Diffeomorphismus, auf großen offenen Mengen einschränken, beispielsweise zu

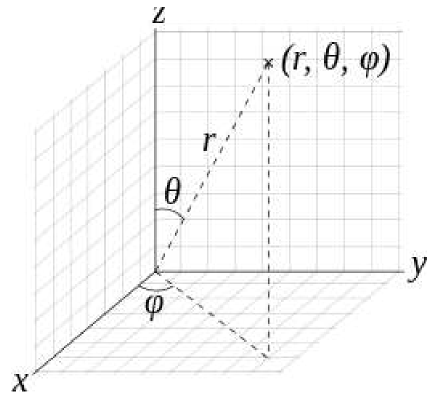
$$\mathbb{R}_+\times]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)|\,x\leq 0\}\,,\ (r,\alpha)\longmapsto (r\,\cos\,\alpha\,,r\,\sin\,\alpha\,).$$

Die Bijektivität folgt dabei aus den grundlegenden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, siehe insbesondere Satz 21.3. Wenn man das offene Intervall $]-\pi,\pi[$ durch das halboffene Intervall $]-\pi,\pi]$ ersetzt, so bekommt man eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+\times]-\pi,\pi]$ und $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Man kann aber nicht von einem Diffeomorphismus sprechen, da dies nur für offene Mengen definiert ist. Die Umkehrabbildung ist übrigens noch nicht einmal stetig.

Beispiel 52.6. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (r,\theta,\varphi) \longmapsto (r\,\cos\varphi\,\sin\theta\,,\, r\,\sin\varphi\,\sin\theta\,,\, r\,\cos\theta\,)$$

(bzw. die Einschränkung davon auf Teilmengen wie $\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$) nennt man *Kugelkoordinatenauswertung*. Diese Abbildung bildet die *Kugelkoordinaten* (r,θ,φ) auf die zugehörigen kartesischen Koordinaten (x,y,z) ab.



Die Bedeutung der Kugelkoordinaten sind folgendermaßen: r ist der Abstand von (x,y,z) zum Nullpunkt. Bei $r=1$ definieren die beiden Winkel φ und θ einen Punkt auf der Einheitskugel, und zwar bestimmt φ einen Punkt auf dem Einheitskreis in der $x-y$-Ebene (auf dem Äquator) und θ bestimmt einen Punkt auf dem zugehörigen Halbkreis (der durch den Äquatorpunkt und Nord- und Südpol festgelegt ist), wobei der Winkel zum Nordpol gemessen wird. Für ($r=1$ und) einen festen Winkel θ parametrisiert φ einen *Breitenkreis*, wobei $\theta=\frac{\pi}{2}$ den Äquator beschreibt. Bei einem festen Winkel φ hingegen parametrisiert θ den oben angesprochenen Halbkreis, einen *Längenkreis*. In der Geographie herrschen übrigens etwas andere Konventionen, man wählt den zweiten Winkel aus $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ (statt + und − spricht man von nördlicher und südlicher Breite) und nimmt $-\sin\theta$.

Die Jacobi-Matrix der Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta & r\,\cos\varphi\,\cos\theta & -r\,\sin\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta & r\,\sin\varphi\,\cos\theta & r\,\cos\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta & -r\,\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

und die Determinante davon ist

$$r^2 \sin \theta \ .$$

D.h. bei $r \neq 0$ und $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$ ist das totale Differential invertierbar und daher liegt nach Satz 51.3 ein lokaler Diffeomorphismus vor. Die inhaltliche Interpretation der Abbildung zeigt, dass hier überhaupt ein Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}_+ \times]0, \pi[\times [0, 2\pi[$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) | \, z \in \mathbb{R}\}$ vorliegt.

Abbildungsverzeichnis