Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Vorlesung 48

Die Hesse-Form

Wir sind natürlich auch an hinreichenden Kriterien für das Vorliegen von lokalen Extrema interessiert. Wie schon im eindimensionalen Fall muss man sich die zweiten Ableitungen anschauen, wobei die Situation natürlich dadurch wesentlich verkompliziert wird, dass es zu je zwei Richtungsvektoren v und w eine zweite Richtungsableitung $D_{vw} = D_v D_w$ gibt. Die zweite Richtungsableitung wird dadurch handhabbar, dass man sie in die sogenannte Hesse-Form bzw. Hesse-Matrix zusammenfasst. Als solche ist sie eine symmetrische Bilinearform, die mit Methoden der linearen Algebra analysiert werden kann. Diese Methoden werden wir im Folgenden entwickeln und insbesondere auf die Hesse-Form anwenden, um schließlich hinreichende Kriterien für die Existenz von lokalen Extrema zu erhalten.

Definition 48.1. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zu $P \in G$ heißt die Abbildung

$$\operatorname{Hess}_P f\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R},\, (u,v) \longmapsto D_u D_v f(P),$$

die *Hesse-Form* im Punkt $P \in G$.

Definition 48.2. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei eine Basis v_i, $i = 1, \ldots, n$, von V gegeben mit den zugehörigen Richtungsableitungen $D_i := D_{v_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Zu $P \in G$ heißt dann die Matrix

$$\begin{pmatrix} D_1 D_1 f(P) & \cdots & D_1 D_n f(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(P) & \cdots & D_n D_n f(P) \end{pmatrix}$$

die *Hesse-Matrix* zu f im Punkt P bezüglich der gegebenen Basis.

Definition 48.3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform. Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle v, w \rangle \,=\, \langle w, v \rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

Lemma 48.4. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zu $P \in G$ ist die Hesse-Form eine symmetrische Bilinearform.

Beweis. Die Symmetrie folgt aus dem Satz von Schwarz. Seien $u, v \in V$ Vektoren und

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 .$$

Dann gelten unter Verwendung von Satz 46.2, Proposition 46.1 und Lemma 43.5 die Gleichheiten

$$\begin{aligned} D_u(D_v f(P)) &= D_u((Df)_P(v)) \\ &= D_u((Df)_P(a_1 v_1 + a_2 v_2)) \\ &= D_u(a_1 (Df)_P(v_1) + a_2 (Df)_P(v_2)) \\ &= a_1 D_u(D_{v_1} f(P)) + a_2 D_u(D_{v_2} f(P)). \end{aligned}$$

□

Eigenschaften von Bilinearformen

Definition 48.5. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann heißt die $n \times n$-Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i,j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis.

Die Hesse-Matrix ist beispielsweise die Gramsche Matrix der Hesse-Form bezüglich der Standardbasis im $\mathbb{R}^n$.

Lemma 48.6. *Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V und es seien G bzw. H die Gramschen Matrizen von $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basen. Zwischen den Basiselementen gelten die Beziehungen*

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j ,$$

die wir durch die Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ausdrücken. Dann besteht zwischen den Gramschen Matrizen die Beziehung

$$H = A G A^t .$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\langle w_r, w_s\rangle &= \langle \sum_{j=1}^{n} a_{rj}v_j, \sum_{k=1}^{n} a_{sk}v_k\rangle \\ &= \sum_{1\leq j,k\leq n} a_{rj}a_{sk}\langle v_j, v_k\rangle \\ &= \sum_{1\leq j\leq n} a_{rj}\left(\sum_{1\leq k\leq n} a_{sk}\langle v_j, v_k\rangle\right) \\ &= \left(A\circ G\circ A^t\right)_{rs}.\end{aligned}$$

□

Definition 48.7. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, -\rangle$. Diese Bilinearfrom heißt

(1) *positiv definit*, wenn $\langle v, v\rangle > 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$ ist.
(2) *negativ definit*, wenn $\langle v, v\rangle < 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$ ist.
(3) *positiv semidefinit*, wenn $\langle v, v\rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ ist.
(4) *negativ semidefinit*, wenn $\langle v, v\rangle \leq 0$ für alle $v \in V$ ist.
(5) *indefinit*, wenn $\langle -, -\rangle$ weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

Positiv definite symmetrische Bilinearformen nennt man auch Skalarprodukte.

Eine Bilinearform auf V kann man auf einen Untervektorraum $U \subseteq V$ einschränken, wodurch sich eine Bilinearform auf U ergibt. Wenn die ursprüngliche Form positiv definit ist, so überträgt sich dies auf die Einschränkung. Allerdings kann eine indefinite Form eingeschränkt auf gewisse Unterräume positiv definit werden und auf andere negativ definit. Dies führt zu folgender Definition.

Definition 48.8. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, -\rangle$. Man sagt, dass eine solche Bilinearform den *Typ*

$$(p, q)$$

besitzt, wobei

$$p := \max\left(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V, \langle -, -\rangle|_U \text{ positiv definit}\right)$$

und

$$q := \max\left(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V, \langle -, -\rangle|_U \text{ negativ definit}\right)$$

ist.

James Joseph Sylvester (1814-1897)

Bei einem Skalarprodukt auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum ist der Typ $(n, 0)$. Wie für Skalarprodukte nennt man zwei Vektoren $v, w \in V$ *orthogonal* bezüglich einer Bilinearform, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ ist, und ähnlich wie im Fall eines Skalarproduktes kann man zeigen, dass es Orthogonalbasen gibt. Die folgende Aussage nennt man den *Trägheitssatz von Sylvester*.

SATZ 48.9. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ (p, q). Dann ist die Gramsche Matrix von $\langle -, - \rangle$ bezüglich einer jeden Orthogonalbasis eine Diagonalmatrix mit p positiven und q negativen Einträgen.*

Beweis. Bezüglich einer Orthogonalbasis $u_1, \ldots, u_n$ hat die Gramsche Matrix natürlich Diagonalgestalt. Es sei p' die Anzahl der positiven Diagonaleinträge und q' die Anzahl der negativen Diagonaleinträge. Die Basis sei so geordnet, dass die ersten p' Diagonaleinträge positiv, die folgenden q' Diagonaleinträge negativ und die übrigen 0 seien. Auf dem p'-dimensionalen Unterraum $U = \langle u_1, \ldots, u_{p'} \rangle$ ist die eingeschränkte Bilinearform positiv definit, so dass $p' \leq p$ gilt. Sei $W = \langle u_{p'+1}, \ldots, u_n \rangle$, auf diesem Unterraum ist die Bilinearform negativ semidefinit. Dabei ist $V = U \oplus W$, und diese beiden Räume sind orthogonal zueinander.

Angenommen, es gebe einen Unterraum U', auf dem die Bilinearform positiv definit ist, und dessen Dimension p größer als p' ist. Die Dimension von W ist $n - p'$ und daher ist $W \cap U' \neq 0$. Für einen Vektor $w \in W \cap U'$ ergibt sich aber direkt der Widerspruch $\langle w, w \rangle > 0$ und $\langle w, w \rangle \leq 0$. $\square$

Minorenkriterien für symmetrische Bilinearformen[1]

Satz 48.10. *Sei $\langle -,- \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -,- \rangle$ bezüglich dieser Basis. Die Determinanten D_k der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k}$$

seien alle von 0 verschieden für $k = 1, \ldots, n$. Es sei q die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1,\ D_1 = \det M_1,\ D_2 = \det M_2, \ldots, D_n = \det M_n = \det G\,.$$

Dann ist $\langle -,- \rangle$ vom Typ $(n-q, q)$.

Beweis. Da nach Voraussetzung insbesondere die Determinante der Gramschen Matrix nicht 0 ist, ist die Bilinearform nicht ausgeartet und daher hat der Typ die Form $(n-b, b)$. Wir müssen zeigen, dass $b = q$ ist. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Dimension von V, wobei der Induktionsanfang trivial ist. Die Aussage sei bis zur Dimension $n-1$ bewiesen und es liege ein n-dimensionaler Raum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ mit den angegebenen Eigenschaften vor. Der Unterraum

$$U = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$$

hat die Dimension $n-1$ und die Folge der Determinanten der Untermatrizen der Gramschen Matrix zur eingeschränkten Form $\langle -,- \rangle|_U$ stimmt mit der vorgegebenen Folge überein, wobei lediglich das letzte Glied

$$D_n = \det M_n = \det G$$

weggelassen wird. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $\langle -,- \rangle|_U$ den Typ $(n-1-a, a)$, wobei a die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1,\ D_1, \ldots, D_{n-1}$$

ist. Aufgrund der Definition des Typs ist

$$a \leq b \leq a+1,$$

da ein b-dimensionaler Unterraum $W \subseteq V$, auf dem die Bilinearform negativ definit ist, zu einem Unterraum $W' = U \cap W \subseteq U$ führt, der die Dimension b oder $b-1$ besitzt und auf dem die eingeschränkte Form ebenfalls negativ definit ist. Nach Aufgabe 48.5 ist das Vorzeichen von D_{n-1} gleich $(-1)^a$ und das Vorzeichen von D_n gleich $(-1)^b$. Das bedeutet, dass zwischen D_{n-1} und D_n ein zusätzlicher Vorzeichenwechsel genau dann vorliegt, wenn

$$b = a+1$$

ist. □

[1] Unter einem *Minor* versteht man die Determinante einer quadratischen Untermatrix einer Matrix. Man könnte also genauso gut von einem Determinantenkriterium sprechen.

Korollar 48.11. *Sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis und es seien D_k die Determinanten der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k},\ k = 1, \ldots, n\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Genau dann ist $\langle -, - \rangle$ positiv definit, wenn alle D_k positiv sind.*
(2) *Genau dann ist $\langle -, - \rangle$ negativ definit, wenn das Vorzeichen in der Folge $D_0 = 1,\ D_1,\ D_2, \ldots, D_n$ an jeder Stelle wechselt.*

Beweis. (1). Wenn die Bilinearform positiv definit ist, so ist nach Aufgabe 48.15 das Vorzeichen der Determinante der Gramschen Matrix gleich $(-1)^0 = 1$, also positiv. Da die Einschränkung der Form auf die Unterräume $U_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ ebenfalls positiv definit ist, sind auch die Determinanten zu den Untermatrizen positiv. Wenn umgekehrt die Determinanten alle positiv sind, so folgt aus Satz 48.10, dass die Bilinearform positiv definit ist. (2) folgt aus (1), indem man die negative Bilinearform, also $-\langle -, - \rangle$, betrachtet. $\square$

Abbildungsverzeichnis