Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Vorlesung 33

Metrische Räume

Euklidische Räume besitzen nach Definition ein Skalarprodukt. Darauf aufbauend kann man einfach die Norm eines Vektors und den Abstand zwischen zwei Vektoren definieren. Die wichtigsten Eigenschaften dieses euklidischen Abstandes werden im Begriff der Metrik bzw. des metrischen Raumes axiomatisiert.

Definition 33.1. Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* (oder *Distanzfunktion*), wenn für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (Definitheit),
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie), und
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (M, d), wobei M eine Menge und $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist.

Man kann leicht aus den Bedingungen folgen, dass eine Metrik nur nichtnegative Werte annimmt. Der Wert $d(x, y)$ gibt den Abstand der Punkte x und y bezüglich d an. Oft wird die Metrik nicht in der Notation erwähnt, obwohl es Situationen gibt, in denen verschiedene Metriken auf ein- und derselben Menge betrachtet werden.

Beispiel 33.2. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und

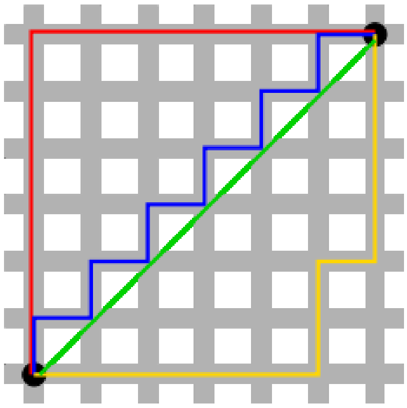
$$d(v, w) := || v - w || := \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$$

der zugehörige Abstand. Dieser besitzt nach Lemma 32.16 die Eigenschaften einer Metrik. Insbesondere ist im $\mathbb{R}^n$ der durch

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

gegebene *euklidische Abstand* eine Metrik.

Wenn wir nichts anderes sagen, so versehen wir den $\mathbb{R}^n$ und den $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ stets mit dem euklidischen Abstand. Insbesondere sind die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ mit der durch den Betrag definierten Metrik ein metrischer Raum. Als gemeinsame Bezeichnung für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ werden wir wieder $\mathbb{K}$ verwenden.



Die Summenmetrik heißt auch *Taxi-Metrik*. Die grüne Linie repräsentiert den euklidischen Abstand, die anderen repräsentieren den Summenabstand.

BEISPIEL 33.3. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$d(x,y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

eine Metrik, die man die *Summenmetrik* nennt.

BEISPIEL 33.4. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$d(x,y) \;=\; \max\left(|x_i - y_i|\,, i = 1, \ldots, n\right)$$

eine Metrik, die man die *Maximumsmetrik* nennt.

BEISPIEL 33.5. Sei (M,d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann ist T ebenfalls ein metrischer Raum, wenn man

$$d_T(x,y) := d(x,y) \text{ für alle } x,y \in T$$

setzt. Diese Metrik heißt die *induzierte Metrik*.

BEISPIEL 33.6. Zu einer beliebigen Menge M kann man durch

$$d(x,y) \;:=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y\,, \\ 1, & \text{falls } x \neq y\,, \end{cases}$$

eine Metrik definieren, die die *diskrete Metrik* heißt.

Teilmengen in einem metrischen Raum

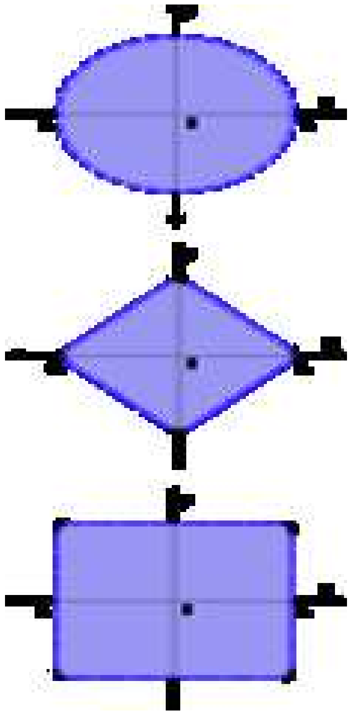
DEFINITION 33.7. Sei (M,d) ein metrischer Raum, $x \in M$ und $\epsilon > 0$ eine positive reelle Zahl. Es ist

$$U\,(x,\epsilon) = \{y \in M \,|\, d(x,y) < \epsilon\}$$

die *offene* und

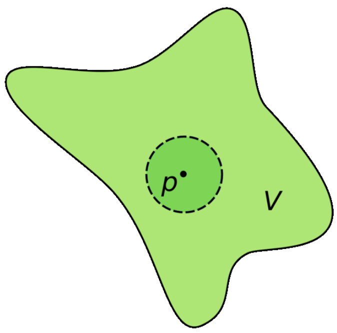
$$B\,(x,\epsilon) = \{y \in M \,|\, d(x,y) \leq \epsilon\}$$

die *abgeschlossene ϵ-Kugel* um x.



Die Gestalt der Kugelumgebungen hängt von der Metrik ab.

Natürlich müssen Kugeln nicht unbedingt kugelförmig aussehen, aber sie tun es in der euklidischen Norm. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $U(x, \epsilon)$ einfach das beidseitig offene Intervall $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ und $Vorlage : Ballabgeschlossen$ ist einfach das beidseitig abgeschlossene Intervall $[x-\epsilon, x+\epsilon]$.



Eine Teilmenge ist offen, wenn jeder Punkt darin gleich mit einer vollen Kugelumgebung drin liegt. Bei einer solchen Menge ist es entscheidend, ob die *Randpunkte* dazu gehören oder nicht.

DEFINITION 33.8. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt *offen* (in (M, d)), wenn für jedes $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$U(x, \epsilon) \subseteq U .$$

Definition 33.9. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $M \setminus A$ offen ist.

Achtung! Abgeschlossen ist nicht das „Gegenteil“ von offen. Die „allermeisten“ Teilmengen eines metrischen Raumes sind weder offen noch abgeschlossen, es gibt aber auch Teilmengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, z.B. die leere Teilmenge und die Gesamtmenge.

Lemma 33.10. *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge M sind offen.*
(2) *Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung*
$$\bigcup_{i \in I} U_i$$
offen.
(3) *Es sei I eine endliche Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt*
$$\bigcap_{i \in I} U_i$$
offen.

Beweis. Siehe Aufgabe 33.7. □

Definition 33.11. Eine Teilmenge $T \subseteq M$ eines metrischen Raumes M heißt *beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl b gibt mit
$$d(x, y) \leq b \text{ für alle } x, y \in T$$

Folgen in metrischen Räumen

Definition 33.12. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M. Man sagt, dass die Folge gegen $x \in M$ *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung
$$d(x_n, x) \leq \epsilon$$
gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch
$$\lim_{n \to \infty} x_n = x\,.$$
Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), anderfalls, dass sie *divergiert*.

Diese Definition stimmt natürlich für $M = \mathbb{R}$ mit unserem bisherigen Begriff für konvergente Folge überein. Allerdings hatten wir, als wir diesen Begriff für angeordnete Körper einführten, die reellen Zahlen selbst noch nicht zur Verfügung.

Lemma 33.13. *Der $\mathbb{R}^m$ sei mit der euklidischen Metrik versehen und sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^m$ mit*

$$z_n = (z_{1n}, \ldots, z_{mn}) \ .$$

Dann konvergiert die Folge genau dann, wenn alle Komponentenfolgen $(z_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren.

Beweis. Sei die Gesamtfolge konvergent gegen $z = (z_1, \ldots, z_m)$. Wir behaupten, dass die i-te Komponentenfolge $(z_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen z_i konvergiert. Sei (ohne Einschränkung) $i = 1$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz der Gesamtfolge gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(z_n, z) \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Daher ist

$$\begin{aligned} |z_{1n} - z_1| &= \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2} \\ &\leq \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2 + (z_{2n} - z_2)^2 + \cdots + (z_{mn} - z_m)^2} \\ &= d(z_n, z) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Seien nun alle Komponentenfolgen konvergent, wobei die i-te Folge den Grenzwert z_i besitzen möge, und sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir setzen $z = (z_1, \ldots, z_m)$ und behaupten, dass die Folge gegen z konvergiert. Zu ϵ/m gibt es für jede Komponentenfolge ein n_{0i} derart, dass $|z_{in} - z_i| \leq \epsilon/m$ für alle $n \geq n_{0i}$ gilt. Dann gilt für alle

$$n \geq n_0 = \max(n_{0i}, i = 1, \ldots, m)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} d(z_n, z) &= \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2 + \cdots + (z_{mn} - z_m)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{m}} \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Insbesondere konvergiert eine Folge von komplexen Zahlen genau dann, wenn die zugehörigen Folgen der Realteile und der Imaginärteile konvergieren, was bereits in Aufgabe 8.12 gezeigt wurde.

Definition 33.14. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder x_n mit $d(x_n, x) \leq \epsilon$ gibt.

Definition 33.15. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$, heißt die Folge

$$i \longmapsto x_{n_i}$$

eine *Teilfolge* der Folge.

Satz 33.16. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$, die in M konvergiert, bereits in T konvergiert.*

Beweis. Sei zunächst T abgeschlossen und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$ gegeben, die in M gegen $x \in M$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $x \in T$ ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann liegt x im offenen Komplement von T und daher gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass der gesamte ϵ-Ball $U(x, \epsilon)$ im Komplement von T liegt. Also ist

$$T \cap U(x, \epsilon) = \emptyset\,.$$

Da die Folge aber gegen x konvergiert, gibt es ein n_0 derart, dass alle Folgenglieder x_n, $n \geq n_0$, zu diesem Ball gehören. Da sie andererseits in T liegen, ist dies ein Widerspruch. Sei nun T nicht abgeschlossen. Wir müssen eine Folge in T konstruieren, die in M konvergiert, deren Grenzwert aber nicht zu T gehört. Da T nicht abgeschlossen ist, ist das Komplement $U := M \setminus T$ nicht offen. D.h. es gibt einen Punkt $x \in U$ derart, dass in jedem ϵ-Ball von x auch Punkte außerhalb von U, also in T liegen. Insbesondere ist also für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ der Durchschnitt

$$T \cap U\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset\,.$$

Wir wählen aus dieser Schnittmenge ein Element x_n und behaupten, dass die sich ergebende Folge die gewünschten Eigenschaften besitzt. Zunächst liegen nach Konstruktion alle Folgenglieder in T. Die Folge konvergiert gegen x, da man sich hierzu auf

$$\epsilon = 1/n$$

beschränken kann und alle Folgenglieder x_m, $m \geq n$, in $U\left(x, \frac{1}{m}\right) \subseteq U\left(x, \frac{1}{n}\right)$ liegen. Da der Grenzwert einer Folge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist, und $x \notin T$ ist, konvergiert die Folge in T nicht. $\square$

Korollar 33.17. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Es sei $A \subseteq T$ eine in T abgeschlossene Teilmenge. Wenn das Supremum $\sup(A)$ in T existiert, so ist $\sup(A) \in A$.*

Beweis. Es sei $s = \sup(A) \in T$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es Elemente $x_n \in A$, $x_n \leq s$ und mit $s - x_n \leq \frac{1}{n}$. Andernfalls wäre nämlich $s - \frac{1}{n}$ eine kleinere obere Schranke von A. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also gegen $s \in T$ und aufgrund von Satz 33.16 ist $s \in A$. $\square$

Wenn man z.B. das offene Intervall $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$ nimmt und $A = T = (0, 1)$ betrachtet, so ist A abgeschlossen in T, das Supremum dieser Menge gehört aber nicht dazu. Ein wichtiger Spezialfall ist das folgende Korollar.

KOROLLAR 33.18. *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere, nach oben beschränkte, abgeschlossene Teilmenge der reellen Zahlen. Dann gehört das Supremum* $\sup(A)$ *zu* A.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 33.17 mit $T = \mathbb{R}$ und aus Satz 7.5. $\square$

Abbildungsverzeichnis