

## Analysis I

### Vorlesung 25

Wir besprechen nun die wesentlichen Rechenregeln, mit denen man Stammfunktionen finden bzw. bestimmte Integrale berechnen kann. Sie beruhen auf Ableitungsregeln.

### Partielle Integration

SATZ 25.1. *Es seien*

$$f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

*Beweis.* Aufgrund der Produktregel ist  $fg$  eine Stammfunktion von  $fg' + f'g$ . Daher ist

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt + \int_a^b f'(t)g(t) dt = \int_a^b (fg' + f'g)(t) dt = fg|_a^b.$$

□

Bei der partiellen Integration sind insbesondere zwei Dinge zu beachten. Erstens liegt die zu integrierende Funktion im Allgemeinen nicht in der Form  $fg'$  vor, sondern einfach als Produkt  $uv$  (wenn kein Produkt vorliegt, so kommt man mit dieser Regel sowieso nicht weiter, wobei allerdings die triviale Produktzerlegung  $1u$  manchmal helfen kann). Dann muss man einen Faktor integrieren und den anderen differenzieren. Wenn  $V$  eine Stammfunktion von  $v$  ist, so lautet die Formel

$$\int uv = uV - \int u'V.$$

Zweitens führt partielle Integration nur dann zum Ziel, wenn das Integral rechts, also  $\int_a^b f'(t)g(t) dt$ , integriert werden kann.

BEISPIEL 25.2. Wir bestimmen eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus  $\ln x$  mittels partieller Integration, wobei wir  $\ln x = 1 \cdot \ln x$  schreiben und die konstante Funktion 1 integrieren und den Logarithmus ableiten. Damit ist

$$\int_a^b \ln x dx = (x \cdot \ln x)|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} dx = (x \cdot \ln x)|_a^b - \int_a^b 1 dx = (x \cdot \ln x)|_a^b - x|_a^b.$$

Eine Stammfunktion ist also  $x \cdot \ln x - x$ .

BEISPIEL 25.3. Eine Stammfunktion der Sinusfunktion  $\sin x$  ist  $-\cos x$ . Um Stammfunktionen zu  $\sin^n x$  zu finden, verwenden wir partielle Integration, um eine rekursive Beziehung zu kleineren Potenzen zu erhalten. Um dies präzise zu machen, arbeiten wir mit Intervallgrenzen, und zwar sollen die Stammfunktionen von 0 ausgehen, also für 0 den Wert 0 besitzen. Für  $n \geq 2$  ist mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin^n t \, dt &= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot (1 - \cos^2 t) \, dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t \, dt - \int_0^x (\sin^{n-2} t \cos t) \cos t \, dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t \, dt - \frac{\sin^{n-1} t}{n-1} \cos t \Big|_0^x - \frac{1}{n-1} \left( \int_0^x \sin^n t \, dt \right). \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit  $n-1$  und Umstellen erhält man

$$n \int_0^x \sin^n t \, dt = (n-1) \int_0^x \sin^{n-2} t \, dt - \sin^{n-1} x \cos x.$$

Speziell ergibt sich für  $n=2$

$$\int_0^x \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x).$$

Die folgende Darstellung von  $\pi$  heißt *Wallissches Produkt*.



John Wallis (1616-1703)

KOROLLAR 25.4. *Es gilt die Darstellung*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{4k^2}{4k^2 - 1}.$$

*Beweis.* Wir setzen

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

Dies ist eine fallende Folge, für die aufgrund von Beispiel 25.3 die rekursive Beziehung

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$$

und die Anfangsbedingungen  $a_0 = \frac{\pi}{2}$  und  $a_1 = 1$  gelten. Ausgeschrieben bedeutet dies für gerades  $n$

$$a_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n(n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und für ungerades  $n$

$$a_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2}{n(n-2)\cdots 5 \cdot 3}.$$

Mit  $n = 2m$  bzw.  $n = 2m + 1$  schreibt sich dies als

$$a_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3 \cdot 1}{2m(2m-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

bzw. als

$$a_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 5 \cdot 3}.$$

Da die Folge fallend ist und  $\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$  gilt, konvergieren die Quotienten  $\frac{a_n}{a_{n+1}}$  gegen 1. Also ist insbesondere

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{2m}}{a_{2m+1}} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3 \cdot 1}{2m(2m-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{2m(2m-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 5 \cdot 3}} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m+1)(2m-1)^2(2m-3)^2 \cdots 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1}{(2m(2m-2)\cdots 4 \cdot 2)^2} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hier kann man den Zähler, indem man zwei aufeinander folgende Faktoren ausmultipliziert, als  $\prod_{k=1}^m (4k^2 - 1)$  und den Nenner als  $\prod_{k=1}^m 4k^2$  schreiben. Daher ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^m 4k^2}{\prod_{k=1}^m (4k^2 - 1)} = \frac{\pi}{2}.$$

□

## Integration der Umkehrfunktion

SATZ 25.5. *Es sei  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann ist*

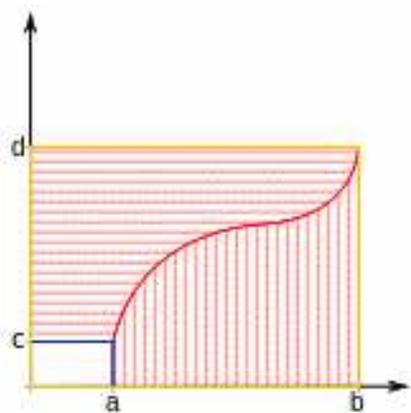
$$G(y) := yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

*eine Stammfunktion der Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .*

*Beweis.* Ableiten unter Verwendung von Lemma 18.7 und Satz 18.9 ergibt

$$\begin{aligned} (yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y)))' &= f^{-1}(y) + y \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} - f(f^{-1}(y)) \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= f^{-1}(y). \end{aligned}$$

□



Funktionsgraph mit Umkehrfunktion und Flächen zur Berechnung eines Integrals der Umkehrfunktion.

Diese Aussage besitzt einen einfachen geometrischen Hintergrund. Wenn  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine streng wachsende stetige Funktion ist (und daher eine Bijektion zwischen  $[a, b]$  und  $[f(a), f(b)]$  induziert), so besteht zwischen den beteiligten Flächeninhalten der Zusammenhang

$$\int_a^b f(s) ds + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt = bf(b) - af(a)$$

bzw.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(s) ds.$$

Für die Stammfunktion  $G$  von  $f^{-1}$  mit dem Startpunkt  $f(a)$  gilt daher, wenn  $F$  die Stammfunktion zu  $f$  bezeichnet, die Beziehung

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{f(a)}^y f^{-1}(t) dt \\ &= \int_{f(a)}^{f(f^{-1}(y))} f^{-1}(t) dt \\ &= f^{-1}(y)f(f^{-1}(y)) - af(a) - \int_a^{f^{-1}(y)} f(s) ds \\ &= yf^{-1}(y) - af(a) - F(f^{-1}(y)) + F(a) \\ &= yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y)) - af(a) + F(a), \end{aligned}$$

wobei  $-af(a) + F(a)$  eine Integrationskonstante ist.

BEISPIEL 25.6. Wir berechnen eine Stammfunktion von  $\arctan x$  unter Verwendung von Satz 25.5. Eine Stammfunktion des Tangens ist

$$\int \tan t \, dt = -\ln(\cos x).$$

Also ist

$$x \cdot \arctan x + \ln(\cos(\arctan x))$$

eine Stammfunktion von  $\arctan x$ .

### Die Substitutionsregel

SATZ 25.7. Sei  $I$  ein reelles Intervall und sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei

$$g: [a, b] \longrightarrow I$$

stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) \, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s) \, ds.$$

*Beweis.* Wegen der Stetigkeit von  $f$  und der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von  $g$  existieren beide Integrale. Es sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , die aufgrund von Korollar 24.5 existiert. Nach der Kettenregel hat die zusammengesetzte Funktion  $t \mapsto F(g(t)) = (F \circ g)(t)$  die Ableitung  $F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$ . Daher gilt insgesamt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) \, dt = (F \circ g)|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s) \, ds.$$

□

BEISPIEL 25.8. Typische Beispiele, wo man sofort erkennen kann, dass man die Substitutionsregel anwenden kann, sind beispielsweise

$$\int g^n g'$$

mit der Stammfunktion

$$\frac{1}{n+1} g^{n+1}$$

oder

$$\int \frac{g'}{g}$$

mit der Stammfunktion

$$\ln g.$$

Häufig liegt ein bestimmtes Integral nicht in einer Form vor, dass man die vorstehende Regel direkt anwenden könnte. Häufiger kommt die folgende umgekehrte Variante zum Zug.

KOROLLAR 25.9. *Es sei*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetige Funktion und es sei*

$$\varphi: [c, d] \longrightarrow [a, b], s \longmapsto \varphi(s),$$

*eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) ds$$

*Beweis.* Nach Satz 25.7 ist

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s))\varphi'(s) ds = \int_{\varphi(\varphi^{-1}(a))}^{\varphi(\varphi^{-1}(b))} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

□

BEMERKUNG 25.10. Die Substitution wird folgendermaßen angewendet: Es soll das Integral

$$\int_a^b f(t) dt$$

berechnet werden. Man muss dann eine Idee haben, dass durch die Substitution

$$t = \varphi(s)$$

das Integral einfacher wird (und zwar unter Berücksichtigung der Ableitung  $\varphi'(t)$  und unter der Bedingung, dass die Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  berechenbar ist). Mit  $c = \varphi^{-1}(a)$  und  $d = \varphi^{-1}(b)$  liegt insgesamt die Situation

$$[c, d] \xrightarrow{\varphi} [a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

vor. In vielen Fällen kommt man mit gewissen Standardsubstitutionen weiter.

Bei einer Substitution werden drei Operationen durchgeführt.

- (1) Ersetze  $f(t)$  durch  $f(\varphi(s))$ .
- (2) Ersetze  $dt$  durch  $\varphi'(s)ds$ .
- (3) Ersetze die Integrationsgrenzen  $a$  und  $b$  durch  $\varphi^{-1}(a)$  und  $\varphi^{-1}(b)$ .

Für den zweiten Schritt empfiehlt sich die Merkregel

$$dt = d\varphi(s) = \varphi'(s)ds,$$

der man im Rahmen der Theorie der „Differentialformen“ auch eine inhaltliche Bedeutung geben kann.

BEISPIEL 25.11. Die obere Kreislinie des Einheitskreises ist die Punktmenge

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq x \leq 1, y \geq 0\}.$$

Zu gegebenem  $x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , gibt es genau ein  $y$ , das diese Bedingung erfüllt, nämlich  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . Daher ist der Flächeninhalt des oberen Einheitskreises gleich der Fläche unter dem Graphen der Funktion  $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$  über dem Intervall  $[-1, 1]$ , also gleich

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Mit der Substitution

$$x = \cos t \text{ bzw. } t = \arccos x$$

(wobei  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  bijektiv ist), erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 - x^2} dx &= \int_{\arccos a}^{\arccos b} \sqrt{1 - \cos^2 t} (-\sin t) dt \\ &= - \int_{\arccos a}^{\arccos b} \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} (\sin t \cos t - t) \Big|_{\arccos a}^{\arccos b}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{2} (x \cdot \sin(\arccos x) - \arccos x) = \frac{1}{2} (x \cdot \sqrt{1 - x^2} - \arccos x)$$

eine Stammfunktion zu  $\sqrt{1 - x^2}$ . Daher ist

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} (\sin 0 + \sin \pi + \pi) = \pi/2.$$

BEISPIEL 25.12. Wir bestimmen eine Stammfunktion von  $\sqrt{x^2 - 1}$  unter Verwendung der Hyperbelfunktionen  $\sinh t$  und  $\cosh t$ , für die die Beziehung  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$  gilt. Die Substitution

$$x = \cosh t \text{ mit } dx = \sinh t dt$$

liefert

$$\int_a^b \sqrt{x^2 - 1} dx = \int_{\operatorname{arcosh} a}^{\operatorname{arcosh} b} \sqrt{\cosh^2 t - 1} \cdot \sinh t dt = \int_{\operatorname{arcosh} a}^{\operatorname{arcosh} b} \sinh^2 t dt.$$

Eine Stammfunktion des Sinus hyperbolicus im Quadrat ergibt sich aus

$$\sinh^2 t = \left( \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2t} + e^{-2t} - 2).$$

Daher ist

$$\int \sinh^2 u du = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} e^{2u} - \frac{1}{2} e^{-2u} - 2u \right) = \frac{1}{4} \sinh 2u - \frac{1}{2} u$$

und somit

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{4} \sinh(2 \operatorname{arcosh} x) - \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} x.$$

BEISPIEL 25.13. Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x \cos x - \sin x)^2}$$

bestimmen. Als Vorüberlegung berechnen wir die Ableitung von

$$\frac{1}{x \cos x - \sin x}.$$

Diese ist

$$-\frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{(x \cos x - \sin x)^2} = \frac{x \sin x}{(x \cos x - \sin x)^2}.$$

Wir schreiben daher  $f$  als ein Produkt

$$f(x) = \frac{x \sin x}{(x \cos x - \sin x)^2} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

und wenden darauf partielle Integration an, wobei wir den ersten Faktor integrieren und den zweiten Faktor ableiten. Die Ableitung des zweiten Faktors ist

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{x \cos x - \sin x} \cdot \frac{x}{\sin x} \\ &\quad - \int \frac{1}{x \cos x - \sin x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} dx \\ &= \frac{1}{x \cos x - \sin x} \cdot \frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ &= \frac{1}{x \cos x - \sin x} \cdot \frac{x}{\sin x} - \cot x. \end{aligned}$$

## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = John Wallis.jpg , Autor = Benutzer Gene.arboit auf Commons,  
Lizenz = CC-by-sa 3.0 2
- Quelle = FunktionUmkehrIntegralOhne.svg , Autor = Jonathan  
Steinbuch (= Benutzer Jonathan.Steinbuch auf Commons), Lizenz  
= CC-BY-SA-3.0 4