

# Analysis I

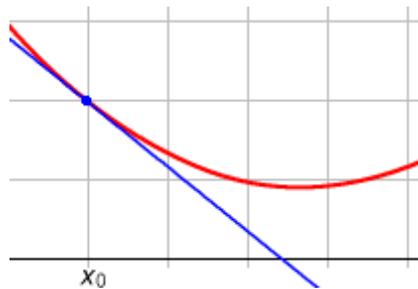
## Vorlesung 18

### Differenzierbare Funktionen

In dieser Vorlesung betrachten wir Funktionen

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei  $D \subseteq \mathbb{K}$  eine offene Menge in  $\mathbb{K}$  ist. Das ist eine Menge derart, dass es zu jedem  $a \in D$  auch eine offene Umgebung  $U(a, r)$ ,  $r > 0$ , gibt, die ganz in  $D$  liegt. Typische Beispiele sind  $D = \mathbb{K}$ ,  $U(a, r)$ ,  $\mathbb{K} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ .



DEFINITION 18.1. Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen,  $a \in D$  ein Punkt und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Zu  $x \in D$ ,  $x \neq a$ , heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von  $f$  zu  $a$  und  $x$ .

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graph durch die beiden Punkte  $(a, f(a))$  und  $(x, f(x))$ . Für  $x = a$  ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für  $x \rightarrow a$  existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der *Tangente*.

DEFINITION 18.2. Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen,  $a \in D$  ein Punkt und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$  *differenzierbar* in  $a$  ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\}, x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von  $f$  in  $a$ , geschrieben

$$f'(a).$$

Die Ableitung in einem Punkt  $a$  ist, falls sie existiert, ein Element in  $\mathbb{K}$ . Häufig nimmt man die Differenz  $h = x - a$  als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt  $h$  gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Die Bedingung  $x \in D \setminus \{a\}$  wird dann zu  $a+h \in D$ ,  $h \neq 0$ .

BEISPIEL 18.3. Es seien  $s, c \in \mathbb{K}$  und sei

$$\alpha: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, z \longmapsto sz + c,$$

eine sogenannte affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt  $a \in \mathbb{K}$  betrachtet man

$$\frac{(sx+c) - (sa+c)}{x-a} = \frac{s(x-a)}{x-a} = s.$$

Dies ist konstant gleich  $s$ , so dass der Limes für  $x$  gegen  $a$  existiert und gleich  $s$  ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich  $s$ . Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

BEISPIEL 18.4. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, z \longmapsto z^2.$$

Der Differenzenquotient zu  $a$  und  $a+h$  ist

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= 2a + h. \end{aligned}$$

Der Limes davon für  $h$  gegen 0 ist  $2a$ . Die Ableitung ist daher  $f'(a) = 2a$ .

### Lineare Approximierbarkeit

SATZ 18.5. Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen,  $a \in D$  ein Punkt und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann ist  $f$  in  $a$  genau dann differenzierbar, wenn es ein  $s \in \mathbb{K}$  und eine Funktion

$$r: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt mit  $r$  stetig in  $a$  und  $r(a) = 0$  und mit

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a).$$

*Beweis.* Wenn  $f$  differenzierbar ist, so setzen wir  $s := f'(a)$ . Für die Funktion  $r$  muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s & \text{für } x \neq a, \\ 0 & \text{für } x = a, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in D \setminus \{a\}} r(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in D \setminus \{a\}} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass  $r$  in  $a$  stetig ist. Wenn umgekehrt  $s$  und  $r$  mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für  $x \neq a$  die Beziehung

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = s + r(x).$$

Da  $r$  stetig in  $a$  ist, muss auch der Limes links für  $x \rightarrow a$  existieren.  $\square$

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Abbildung

$$D \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(a) + f'(a)(x - a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Ihr Graph heißt die *Tangente* an  $f$  im Punkt  $a$ . Die durch  $f(a)$  gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

**KOROLLAR 18.6.** Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen,  $a \in D$  ein Punkt und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion, die im Punkt  $a$  differenzierbar sei. Dann ist  $f$  stetig in  $a$ .

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 18.5.  $\square$

## Ableitungsregeln

**LEMMA 18.7.** Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen,  $a \in D$  ein Punkt und

$$f, g: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei Funktionen, die in  $a$  differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.

(1) Die Summe  $f + g$  ist differenzierbar in  $a$  mit

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(2) Das Produkt  $f \cdot g$  ist differenzierbar in  $a$  mit

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(3) Für  $c \in \mathbb{K}$  ist auch  $cf$  in  $a$  differenzierbar mit

$$(cf)'(a) = cf'(a).$$

(4) Wenn  $g$  keine Nullstelle in  $D$  besitzt, so ist  $1/g$  differenzierbar in  $a$  mit

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$

(5) Wenn  $g$  keine Nullstelle in  $D$  besitzt, so ist  $f/g$  differenzierbar in  $a$  mit

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

*Beweis.* (1). Wir schreiben  $f$  bzw.  $g$  mit den in Satz 18.5 formulierten Objekten, also

$$f(x) = f(a) + s(x - a) + r(x)(x - a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x - a) + \tilde{r}(x)(x - a).$$

Summieren ergibt

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s + \tilde{s})(x - a) + (r + \tilde{r})(x)(x - a).$$

Dabei ist die Summe  $r + \tilde{r}$  wieder stetig in  $a$  mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x) = f(a) + s(x - a) + r(x)(x - a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x - a) + \tilde{r}(x)(x - a)$$

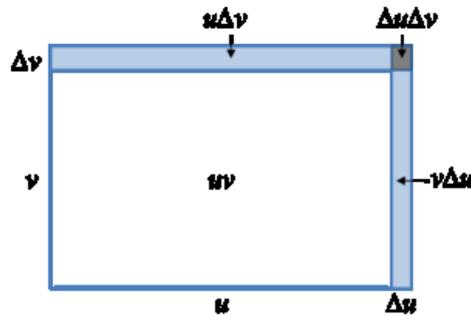
aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + s(x - a) + r(x)(x - a)) \\ &\quad (g(a) + \tilde{s}(x - a) + \tilde{r}(x)(x - a)) \\ &= f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x - a) \\ &\quad + (f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x - a) \\ &\quad + s\tilde{r}(x)(x - a) + \tilde{s}r(x)(x - a) + r(x)\tilde{r}(x)(x - a))(x - a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 12.10 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für  $x = a$ . (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Da  $g$  nach Korollar 18.6 stetig in  $a$  ist, konvergiert für  $x \rightarrow a$  der linke Faktor gegen  $-\frac{1}{g(a)^2}$  und wegen der Differenzierbarkeit von  $g$  in  $a$  konvergiert der rechte Faktor gegen  $g'(a)$ . (5) folgt aus (2) und (4).  $\square$



Eine Veranschaulichung der Produktregel: Der Zuwachs eines Flächeninhalts entspricht der Summe der beiden Produkte aus Seitenlänge und Seitenlängenzuwachs. Für den infinitesimalen Zuwachs ist das Produkt der beiden Seitenlängenzuwächse irrelevant.

KOROLLAR 18.8. *Eine Polynomfunktion*

$$f = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + c_nz^n$$

ist in jedem Punkt differenzierbar, und für die Ableitung gilt

$$f'(z) = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \cdots + (n-1)c_{n-1}z^{n-2} + nc_nz^{n-1}.$$

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 18.7. □

SATZ 18.9. *Seien  $D$  und  $E$  offene Mengen in  $\mathbb{K}$  und seien*

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g: E \longrightarrow \mathbb{K}$$

*Funktionen mit  $f(D) \subseteq E$ . Es sei  $f$  in  $a$  differenzierbar und  $g$  sei in  $b = f(a)$  differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung*

$$g \circ f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

*in  $a$  differenzierbar mit der Ableitung*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

*Beweis.* Aufgrund von Satz 18.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x)(x - a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

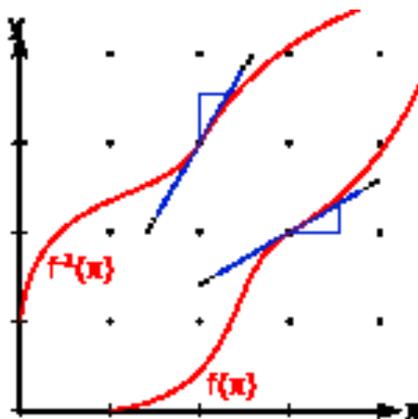
schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x - a) + r(x)(x - a)) \\ &\quad + s(f(x))(f'(a)(x - a) + r(x)(x - a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x - a) \\ &\quad + (g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x)))(x - a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in  $a$  mit dem Wert 0. □



Eine Veranschaulichung für die Ableitung der Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion besitzt den an der Hauptdiagonalen gespiegelten Graphen und die Tangente wird mitgespiegelt.

SATZ 18.10. Seien  $D$  und  $E$  offene Mengen in  $\mathbb{K}$  und sei

$$f: D \rightarrow E$$

eine bijektive stetige Funktion mit einer stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}: E \rightarrow D$$

Es sei  $f$  in  $a \in D$  differenzierbar mit  $f'(a) \neq 0$ . Dann ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  in  $b = f(a)$  differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

*Beweis.* Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für  $y \rightarrow b$  existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $E \setminus \{b\}$ , die gegen  $b$  konvergiert. Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von  $f^{-1}$  konvergiert auch die Folge mit den Gliedern  $x_n := f^{-1}(y_n)$  gegen  $a$ . Wegen der Bijektivität ist  $x_n \neq a$  für alle  $n$ . Damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert. □

BEISPIEL 18.11. Die Funktion

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  (eingeschränkt auf  $\mathbb{R}_+$ ). Deren Ableitung in einem Punkt  $a$  ist  $f'(a) = 2a$ . Nach Satz 18.10 gilt daher für  $b \in \mathbb{R}_+$  die Beziehung

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3$ . Deren Ableitung in  $a$  ist  $f'(a) = 3a^2$ , dies ist für  $a \neq 0$  von 0 verschieden. Nach Satz 18.10 ist für  $b \neq 0$  somit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3(b^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist  $f^{-1}$  nicht differenzierbar.

## Höhere Ableitungen

DEFINITION 18.12. Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$  *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt  $a \in D$  die Ableitung  $f'(a)$  von  $f$  in  $a$  existiert. Die Abbildung

$$f': D \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f'(x),$$

heißt die *Ableitung* (oder *Ableitungsfunktion*) von  $f$ .

DEFINITION 18.13. Es sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$   $n$ -mal *differenzierbar* ist, wenn  $f$   $(n-1)$ -mal differenzierbar ist und die  $(n-1)$ -te Ableitung  $f^{(n-1)}$  differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(z) := (f^{(n-1)})'(z)$$

nennt man dann die  $n$ -te *Ableitung* von  $f$ .

DEFINITION 18.14. Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  offen und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$   $n$ -mal *stetig differenzierbar* ist, wenn  $f$   $n$ -mal differenzierbar ist und die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  stetig ist.



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Tangente2.gif , Autor = Benutzer Loveless auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	1
Quelle = Schema Règle produit.png , Autor = Benutzer ThibautLienart auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	5
Quelle = FunktionUmkehrTangente.svg , Autor = Jonathan Steinbuch, Lizenz = CC-by-sa 3.0	6