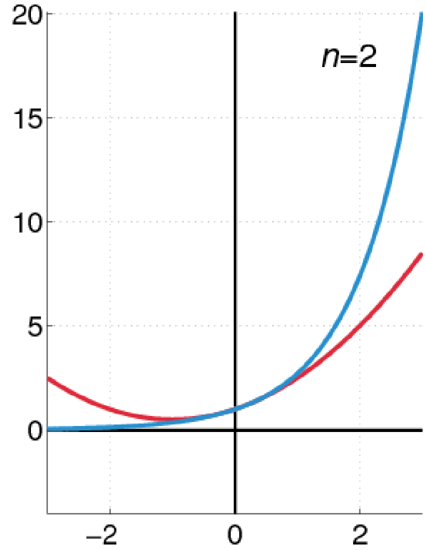
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 16

Funktionenfolgen



Eine (vertikal gestauchte) Darstellung der ersten acht polynomialen Approximationen der reellen Exponentialfunktion

Wir haben das letzte Mal gesehen, dass die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ stellt also die Polynomfunktion

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

eine „approximierende Funktion“ für die Exponentialfunktion dar. Dabei ist allerdings die Güte der Approximation abhängig von z (bei fixiertem n). In dieser Vorlesung werden wir verschiedene Konzepte vorstellen, wie man eine Funktion als Grenzfunktion einer Funktionenfolge auffassen kann. Eine unmittelbare Anwendung wird sein, dass die Exponentialfunktion stetig ist.

Definition 16.1. Es sei T eine Menge und

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K},$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Funktionen. Man sagt, dass die Funktionenfolge *punktweise konvergiert*, wenn für jedes $x \in T$ die Folge

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

(in $\mathbb{K}$) konvergiert.

Wenn eine punktweise konvergente Funktionenfolge vorliegt, so wird durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

eine sogenannte *Grenzfunktion* $f\colon T \to \mathbb{K}$ definiert.

Die Funktionenfolge $f_n = \sum_{k=}^{n} \frac{1}{k!} z^k$ konvergiert punktweise, die Grenzfunktion ist die Exponentialfunktion. Selbst wenn (bei $T \subseteq \mathbb{K}$) sämtliche Funktionen stetig sind, muss diese Grenzfunktion nicht stetig sein.

Beispiel 16.2. Es sei $T = [0,1]$ und

$$f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n .$$

Für jedes $x \in [0,1]$, $x < 1$, konvergiert die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 und für $x = 1$ liegt die konstante Folge zum Wert 1 vor. Die Grenzfunktion ist also

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1\,, \\ 1 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig, obwohl alle f_n stetig sind.

Man braucht einen stärkeren Konvergenzbegriff, um die Stetigkeit der Grenzfunktion zu sichern.

Definition 16.3. Es sei T eine Menge und

$$f_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K},$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Funktionen. Man sagt, dass die Funktionenfolge *gleichmäßig konvergiert*, wenn es eine Funktion

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt derart, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 mit

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in T$$

gibt.

Lemma 16.4. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und es sei*

$$f_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Folge von stetigen Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x \in T$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein n_0 mit $d(f_n(y), f(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $n \geq n_0$ und alle $y \in T$. Wegen der Stetigkeit von f_{n_0} in x gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $y \in T$ mit $d(x,y) \leq \delta$. Für diese y gilt somit

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Das Konvergenzkriterium von Weierstraß

Definition 16.5. Es sei T eine Menge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$\| f \| := \| f \|_T = \sup\left(|f(x)| \,|x \in T\right)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f. Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞.

Die folgende Aussage heißt das *Konvergenzkriterium von Weierstraß*. Es geht darin um Funktionenfolgen f_n, die als Partialsummen $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$ von Funktionen g_k gegeben sind, wie dies auch bei Potenzreihen der Fall ist.

Satz 16.6. *Es sei T eine Menge und sei*

$$g_k\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktionenfolge mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| g_k \| < \infty\,.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ (also die Funktionenfolge $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$) gleichmäßig und punktweise absolut gegen eine Funktion

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Beweis. Sei $x \in T$. Wegen $|g_k(x)| \leq \| g_k \|$ ist aufgrund des Majorantenkriteriums die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x)|$ absolut konvergent, und das bedeutet, dass die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ punktweise absolut konvergiert. Wir setzen $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$ und

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

Wir wollen zeigen, dass die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund des Cauchy-Kriteriums für Reihen gibt es ein n_0 mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \| g_k \| \leq \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Damit haben wir für $n \geq n_0$ insgesamt die Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |g_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \| g_k \| \leq \epsilon.$$

$\square$

Konvergenz von Potenzreihen

Es seien c_n, $n \in \mathbb{N}$, komplexe Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Funktionenfolge f_n mit

$$f_n\colon\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k(z-a)^k.$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist dies eine Potenzreihe in $z-a$. Im Folgenden werden wir auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ mit variablem z als Potenzreihe bezeichnen. Dabei heißt a der *Entwicklungspunkt der Potenzreihe*. Im Allgemeinen konvergiert diese Funktionenreihe weder punktweise auf ganz $\mathbb{C}$ noch gleichmäßig. Wir werden aber sehen, dass häufig auf geeigneten Teilmengen $T \subseteq \mathbb{C}$ gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Lemma 16.7. *Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

sei für eine komplexe Zahl $z = b$, $b \neq a$, konvergent. Dann ist für jeden reellen Radius r mit $0 < r < |b-a|$ die Potenzreihe $f(z)$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B\,(a,r)$ punktweise absolut und gleichmäßig konvergent.

Beweis. Wir werden Satz 16.6 auf $T = B\,(a,r)$ anwenden. Wegen der Konvergenz für $z = b$ sind die Summanden $c_n(b-a)^n$ nach Lemma 9.5 eine Nullfolge, d.h. es gibt insbesondere ein $M > 0$ mit

$$|c_n(b-a)^n| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gelten für jedes $z \in B\,(a,r)$ die Abschätzungen

$$|c_n(z-a)^n| \;=\; |c_n(b-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{b-a}\right|^n \;\leq\; M \cdot \left|\frac{z-a}{b-a}\right|^n \;\leq\; M\left(\frac{r}{|b-a|}\right)^n.$$

Dabei ist nach Voraussetzung $\frac{r}{|b-a|} < 1$. Daher liegen rechts die Summanden einer nach Satz 9.13 konvergenten geometrische Reihe vor. Deren Grenzwert liefert eine obere Schranke für die Reihe der Supremumsnormen. $\square$

Definition 16.8. Für eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

heißt

$$\sup\left(|b-a|\,, b \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} c_n(b-a)^n \text{ konvergiert}\right)$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Das ist eine nichtnegative reelle Zahl oder $=\infty$.

Jede Potenzreihe hat also grundsätzlich das gleiche Konvergenzverhalten: Es gibt eine Kreischeibe (die eben durch den Konvergenzradius bestimmt ist, wobei die Extremfälle $r = 0$ und $r = \infty$ erlaubt sind) um den Entwicklungspunkt, in deren Innerem die Potenzreihe konvergiert und so, dass sie außerhalb davon in keinem Punkt konvergiert. Nur auf dem Rand der Kreisscheibe kann alles mögliche passieren. Der Fall $r = 0$ ist nicht sehr interessant. Bei positivem Konvergenzradius (einschließlich dem Fall $r = \infty$) sagt man auch, dass die Potenzreihe konvergiert.

KOROLLAR 16.9. *Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

eine Potenzreihe mit einem positiven Konvergenzradius r. Dann stellt die Potenzreihe $f(z)$ auf der offenen Kreisscheibe $U(a,r)$ eine stetige Funktion dar.

Beweis. Jeder Punkt $z \in U(a,r)$ liegt im Innern einer abgeschlossenen Kreisscheibe $B(a,s) \subseteq U(a,r)$ mit $s < r$. Auf dieser abgeschlossenen Kreisscheibe ist die Potenzreihe nach Lemma 16.7 gleichmäßig konvergent, daher ist nach Lemma 16.4 die Grenzfunktion stetig. □

KOROLLAR 16.10. *Die Exponentialreihe und die trigonometrischen Reihen Sinus und Kosinus besitzen einen unendlichen Konvergenzradius, und die komplexe Exponentialfunktion, die komplexe Sinusfunktion und die komplexe Kosinusfunktion sind stetig.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 15.5 und Korollar 16.9. □

KOROLLAR 16.11. *Für die (durch die Exponentialreihe definierte) reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

gilt

$$\exp x = (\exp 1)^x \,.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 15.7, aus Korollar 16.10 und aus Aufgabe 14.17. □

Die reelle Zahl $\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ stimmt mit der als $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ eingeführten *eulerschen Zahl* überein, was wir aber noch nicht bewiesen haben. Aufgrund dieses Sachverhaltes und der vorstehenden Aussage schreiben wir häufig $e^z = \exp z$, und zwar auch für komplexe Argumente.

Der Identitätssatz für Potenzreihen

LEMMA 16.12. *Es seien* $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien, deren Minimum* r *sei. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *mit* $c_n = a_n + b_n$ *ist konvergent auf* $U(0, r)$ *und stellt dort die Summenfunktion* $f + g$ *dar.*
(2) *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ *mit* $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ *ist konvergent auf* $U(0, r)$ *und stellt dort die Produktfunktion* fg *dar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.10. □

SATZ 16.13. *Es seien* $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien und derart, dass es ein* $\epsilon > 0$ *gibt, dass die dadurch definierten Funktionen*

$$f, g \colon U(0, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{K}$$

übereinstimmen. Dann ist $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir betrachten die Differenzreihe $h = f - g = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = a_n - b_n$. Deren zugehörige Funktion ist nach Voraussetzung und nach Lemma 16.12 (1) auf $U(0, \epsilon)$ die Nullfunktion. Nach Aufgabe 16.14 ist daher $c_n = 0$, also $a_n = b_n$. □

Abbildungsverzeichnis